CONCEBIR y ANALIZAR ESTRUCTURAS

v3.0

Jaime Cervera

Concebir y analizar estructuras

Jaime Cervera Bravo
Departamento de Estructuras de Edificación
Escuela Técnica Superior de Arquitectura
Universidad Politécnica de Madrid

V3.0, Enero de 2011

Debo hacer constar mi reconocimiento a las muchas personas que, a lo largo de los años, me han ayudado a entender con más profundidad el comportamiento estructural, y las dificultades para su comprensión. Buena parte de ellas son mis apreciados colegas en las distintas actividades en el Departamento de Estructuras de Edificación de la Escuela de Arquitectura de Madrid. Pero también ha resultado formativa el diálogo con otros profesionales y alumnos, pues a menudo la necesidad de reformular cuestiones difíciles aporta interesantes perspectivas no siempre sospechadas. Aunque mis deudas son múltiples, citaré explícitamente a Ricardo Aroca, que ha sido el referente básico del Departamento, y a Mariano Vázquez, que tuvo la deferencia de leer detenidamente el texto inicial, y proponer acertadas correcciones. A todos, mi gratitud.

La versión actual constituye un avance importante en relación con la primera publicada, puesto que desarrolla en forma extensa métodos de análisis plástico —y alguna propuesta en métodos de *sínstesis*— basados en las técnicas de programación lineal, para las que se dispone de buen número de herramientas, lo que permite establecer desde este enfoque un modelo teórico completo y cerrado. Debo agradecer en este caso las ideas iniciales y las aportaciones de Jesús Ortiz y José Ignacio Hernando.

Índice general

Parte I

Bases

Capítulo 1

Introducción

La concepción y el proyecto de estructuras requieren una *visión* de su comportamiento que usualmente se adquiere por experiencia, auque puede acelerarse cuando se comprenden las bases geométricas de la respuesta estructural. Este texto trata de presentar conocimientos que, al cabo de los años, he llegado a considerar básicos para alcanzar dicha comprensión. Presento, por un lado, las bases y las herramientas de análisis de estructuras susceptibles de empleo generalizado, aplicadas fundamentalmente a tipos ligados a la edificación. Por otro lado estudio las generalizaciones que pueden derivarse, empleando dichos métodos, sobre la relación entre el comportamiento estructural y la forma de la estructura. El presente texto contiene la base de un breve seminario de doctorado de 10 horas impartido desde el año 2004. Sus pretensiones no alcanzan, sin embargo, las de ser un texto completo en ningún tipo de recorrido[1], sino más bien una selección personal, a veces de regularidades, en otros casos de singularidades, de carácter teórico, capaces de guiar el difícil trayecto orientado a intuir la relación entre forma y comportamiento.

En esta introducción, entendiendo la distancia que media entre concebir y comprobar las estructuras, se argumenta la necesidad de dominar las técnicas de análisis en su forma más general como modo de interiorizar el comportamiento estructural.

En el primer capítulo se revisan los conceptos básicos comunes a los diferentes métodos de análisis, poniendo de manifiesto sus relaciones.

En los capítulos siguientes se desarrollan con mayor detalle métodos elásticos y plásticos aplicables a estructuras típicas de edificación, como son las estructuras de pisos superpuestos, y las de cubierta.

Más adelante se emplean tales métodos para evaluar y estimar el comportamiento general de los tipos de estructura señalados, en base a sus cualidades geométricas o de forma.

Finalmente se concluye revelando algunas de las bases formales más generales que pueden considerarse responsables del buen comportamiento estructural.

Es preciso reconocer aquí el papel fundamental que, para este texto, ha supuesto la docencia en el Departamento de Estructuras de Edificación de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid, en el que han germinado, de la mano de mis colegas, muchas de las ideas

[1] Pueden apreciarse múltiples carencias si se observa con la perspectiva de lo que podría constituir un texto de introducción al comportamiento estructural.

que aquí se presentan. El rastreo de su origen sería una interesante tarea de reconocimiento, en buena parte por hacer. Cabe, sin embargo, destacar el papel básico desempeñado por Ricardo Aroca en el inicio y en la dirección de esta línea de reflexión a través de su docencia en dicho departamento.

1.1. Concebir y comprobar

Los arquitectos tenemos una clara idea de la diferencia existente entre concebir y validar un concepto. Todo proyecto no consiste más que en un repetido ciclo concepción–comprobación, ciclo en el que los resultados de la comprobación aplicada al objeto que se concibe, o bien validan el concepto, ratifican su actual estado, o bien fuerzan a su corrección más o menos profunda, en un proceso de progresión en el detalle de lo concebido, y de progresiva adecuación del objeto imaginado a los requisitos a que debe plegarse el objeto real que prefigura. Dicho proceso no es lineal, no está asegurado que las bases de partida hayan de ser inamovibles y, a menudo, deben ser modificadas provocando importantes alteraciones.

En dicho proceso podría hablarse de potencia y precisión[2] como términos que revelan aspectos de dicha progresión hacia la realización buscada: las decisiones tienen mayor o menor potencia según supongan un impacto mayor o menor en la materialización concreta. Decisiones de mucha potencia que se revelan inadecuadas implicarán correcciones importantes de forma, y es importante asegurar su justeza lo antes posible en el proceso de proyecto, pues todo el trabajo de refinamiento desarrollado puede revelarse inútil.

La precisión está ligada al progresivo refinamiento en el concepto, su progresiva aproximación a la realidad pretendida.

El proceso de proyecto se entiende así como un proceso de concepción—comprobación, en el que las decisiones se producen en general en el sentido de las de progresivamente menor potencia, y progresivamente mayor precisión, y en el que la *comprobación*, sea sobre la totalidad del objeto, sea sobre partes o abtracciones del mismo, debe permitir su validación frente a los objetivos o requisitos a cumplir.

Trasladando tales ideas a las estructuras resulta fácil entender la dialéctica entre su concepción y su validación. En dicha dialéctica, la fase de concepción interactúa con el resto de los aspectos arquitectónicos considerados en el proyecto del objeto que se pretende edificar, siendo los requisitos estructurales sólo parte de los requisitos generales a que el proyecto responde.

La fase de comprobación, sin embargo, goza de autonomía propia: podemos asegurar la validez de una estructura sea experimentalmente, sea analíticamente al margen de otras consideraciones, si bien dicha validez meramente estructural no asegura la validez del proyecto, la compatibilidad de la estructura con otros elementos de éste, etc.[3] Ahora bien, la comprobación estructural exige mucha precisión en el diseño, mucho detalle en la definición del objeto proyectado. El caso más extremo lo representa el análisis experimental: es preciso producir un objeto real completo —o un modelo a escala— para el experimento. Las teorías

[2] Conceptos identificados en los cursos impartidos por Ricardo Aroca en la ETSAM.

[3] Dicho sea de paso, esta autonomía permite la existencia de una casta de especialistas que, en tanto actúan como tales, se sitúan al margen del resto de las consideraciones a que responde el proyecto, lo que da origen a no pocos problemas de comunicación.

de análisis estructural permiten disculpar la construcción del objeto, al predecir teóricamente el resultado del experimento en él sobre la base de experimentos previos y de las generalizaciones que la teoría aporta, pero el análisis requiere mucha definición. Hoy día pueden realizarse análisis sobre modelos teóricos o simulados —informáticos— de estructuras de todo tipo, pero los métodos más generales, para asegurar sus predicciones, requieren de tal cúmulo de información, que el detalle o precisión con que debe estar definido el objeto a analizar es muy alto. Por otro lado los procesos de comprobación, sean experimentales o analíticos, son en cierta medida ciegos u oscuros: la afirmación de validez o invalidez, aporta en muchas ocasiones muy poca información sobre las correcciones a realizar: un ejemplo clásico es el de los pórticos de gran altura sometidos a viento en los que el fallo de los pilares inferiores debe aconsejar el aumento en las dimensiones —cantos— de las vigas de las plantas más bajas, conclusión invisible como resultado del análisis.

Resulta evidente que la toma de decisiones en el desarrollo de la estructura, realizada en el curso del proyecto completo, debe facilitar que las decisiones de mayor potencia —las que responden a los parámetros geométricos y tipológicos fundamentales— puedan tomarse pronto con garantías de validez, con *inmunidad* frente a las decisiones de precisión mayor que se tomen posteriormente: por ejemplo, es deseable acertar en las dimensiones de vigas de hormigón, previas a su posterior armado, aun cuando es en el proceso de armado en el que se validan dichas dimensiones.

Dado que la mayor parte de las comprobaciones a que se someten los modelos en las fases iniciales de proyecto se basan en su definición geométrica, resulta de gran valor asegurar la idoneidad estructural a partir de parámetros geométricos: dimensiones, proporciones, tamaños ..., de modo que las potentes decisiones iniciales tengan una buena garantía de validez posterior.

Esto permite entender la importancia que supone la comprensión del comportamiento estructural, en lo posible desde la forma de la estructura, en las fases iniciales de concepción, y la importantísima diferencia de conocimiento que esta comprensión supone frente a la capacidad general de análisis. Es este conocimiento el que puede conceptuarse como *visión* del comportamiento estructural.

1.2. Lenguaje y percepción: el papel del análisis

La percepción de cualquier clase de objetos está íntimamente asociada a las pautas de interpretación aprendidas con anterioridad al acto de percibir. Desde el nacimiento, la mayor parte de la actividad intelectual consciente o inconsciente está destinada a crear el marco de interpretación de los objetos y acontecimientos que conforman el entorno vital.

Dicho marco, de complejidad creciente, tiene una doble dimensión que podemos calificar de paradójica. Pues por un lado, al ceñir las pautas con que se observa la realidad, tienen un papel de constricción que reduce las formas en que dicha realidad puede ser aprehendida. La realidad quedaría deformada por dicho marco. Pero por otro lado, sin él, la complejidad de la realidad no puede ser descrita ni comprendida de modo alguno, de modo que la carencia de marco resulta más reduccionista que su propia complejidad. La evolución en la percepción, la mejora en la capacidad de percibir, resulta más bien del aumento

en la complejidad del marco mismo, y su mejor capacidad de adaptación para describir nuevos aspectos de la realidad.

De este modo la percepción y el lenguaje tienen una extrema ligazón en todos los campos de la cultura, ciencia incluida. Sólo se percibe con precisión lo que puede describirse con análoga precisión, es decir, aquello sobre lo que puede aplicarse un lenguaje específico.

El lenguaje cumple no sólo el papel de establecer el entramado que hace posible la percepción; es responsable de la capacidad de descripción, considerando tanto la intro–descripción asociada a la comprensión de lo percibido, como la extra–descripción, base de la comunicación con otros.

La comprensión del comportamiento estructural y la capacidad de comunicar dicho comportamiento está íntimamente ligada al lenguaje que permite expresar hechos sobre resistencia o deformación de las estructuras, y por lo tanto, el análisis de estructuras juega un papel central en dicha comprensión.

No es posible una percepción compleja e inteligente de las estructuras sin una seria capacidad de análisis de éstas. Se trata, por supuesto, de una condición necesaria aunque no suficiente. No por ser buen analista se asegura una capacidad de comprensión e innovación estructural, pero es ése un paso en la buena dirección.

Un objetivo primordial de este texto es, por tanto, profundizar en dicho lenguaje, tratar de dominarlo, al menos aplicado a los tipos estructurales que aborda.

Pero las posiblidades de *liberarse* de las constricciones que el propio lenguaje impone están ligadas a la capacidad de abstracción y generalización de dicho lenguaje. Así pues, no sólo por razones de comunicabilidad, sino por razones aún más egoístas, de libertad personal, de capacidad de innovación, de capacidad para desembarazarse del análisis mismo, es necesario avanzar en el grado de abstracción con que se considera el análisis.

En esta línea es sorprendente constatar el escaso número de conceptos fundamentales que sustenta toda la reflexión sobre las estructuras, y su elevada versatilidad. Unos pocos elementos presentan disfraces aparentemente muy diferenciados en estructuras de tipos diferentes, pero nuestra actual capacidad de abstracción permite entenderlos como aspectos diferentes del mimo tipo de concepto, y no sólo entenderlos de dicha forma común, sino de operar con ellos de la misma forma. Los actuales programas de análisis por elementos finitos basan su universalidad precisamente en la generalidad de aplicación de unos pocos —muy pocos— conceptos básicos, semejantes en todos los tipos de comportamiento estructural a que pueden aplicarse.

Trataremos de avanzar en el grado de abstracción con que se consideran y tratan las cuestiones estructurales, buscando describir su funcionamiento general recurriendo a objetos de interpretación global, por tanto más complejos.

1.3. Analizar estructuras para comprenderlas

La comprensión de las estructuras va más allá de la comprensión del lenguaje empleado para categorizarlas, hay también que saber hablar de ellas: no sólo hay que entender *de* estructuras, de teoría estructural; para proyectar hay que entender *las* estructuras.

Este aprendizaje sólo es posible tratando con estructuras, reales o virtuales, pero en buen número, considerando y comparando muchas. No se trata sólo de que la abstracción se aprenda inductivamente: el proceso deductivo es posible sólo cuando ya se ha alcanzado cierto nivel conceptual, y por tanto el camino del aprendizaje es de doble vía, de ida y vuelta en cierta forma, cíclico: deben revisarse tipos que se creían conocidos a la vista de los nuevos grados de conocimiento alcanzados. Se trata de análoga diferencia a la que existe entre conocer las teorías sobre el color y la composición, y ser capaz de aprehender y emocionarse ante la belleza de color o composición de una obra de arte. Saber analizar una estructura es sólo un paso en aprehender de un modo global, intuitivo, o físico, el comportamiento de dicha estructura. Para llegar a ello hay que establecer una cierta empatía entre la descripción cualitativa y cuantitativa de su comportamiento con estados del propio cuerpo: por poner una imagen gráfica sencilla, se trata de llegar a experimentar incomodidad física y no sólo intelectual a la vista de geometrías inestables o ineficaces.

Es importante no olvidar el doble aspecto cualitativo y cuantitativo de la cuestión estructural: en ciencia, en ciencia física particularmente, y desde luego en estructuras, la cualidad se mide en la cantidad, y no hay cualidad separada de la cantidad misma. La cualidad es un atributo o constructo conceptual que aplicamos para describir y clasificar cantidades y sus relaciones, que nos permiten medirlas. Las relaciones entre cualidades son proyecciones de las relaciones medibles entre cantidades mediadas por las construcciones teóricas en las que fundamentamos tales cualidades. De modo que un pórtico es deformable porque medimos los descensos o los desplazamientos de determinados puntos del mismo, y un objeto es resistente o no porque somos capaces de medir ciertas acciones frente a las que es capaz de sobrevivir. Calificar y comprender una estructura exige medir su comportamiento y, por lo tanto, *comprender* una estructura supone anticipar de cualquier modo intuitivo las medidas de describen dicho comportamiento.

Ahora bien, las cualidades de supervivencia de las estructuras, ligadas a las medidas de sus esfuerzos y movimientos, están íntimamente ligadas a su forma —además de a los materiales de que está constituida—. Es particularmente la forma lo que interesa al arquitecto en las fases primordiales de concepción, puesto que es la forma la cualidad primordial de contraste con los requisitos establecidos a la obra, y la que será responsable de su capacidad para emocionar. Por ello, los parámetros básicos de descripción *cuantitativa*, de análisis de la estructura, deberán ser geométricos si pretendemos que la caracterización *cualitativa* de su comportamiento pueda ser aprehendible desde la forma misma.

De este modo el conocimiento y dominio de las diferentes técnicas de análisis no es un objetivo en sí mismo: se trata por un lado de una herramienta de percepción, de aprehensión de las estructuras que tratamos de proyectar. Pero por otro lado, mediante su empleo repetido sobre estructuras sucesivas, o mediante su aplicación sistemática a colecciones o géneros estructurales, el análisis es una herramienta que permite desarrollar afirmaciones de viabilidad sobre dichos géneros o tipos, estableciendo procedimientos aprehensibles y capaces de predecir su comportamiento como función, o resultado inmediato, de sus parámetros formales más esenciales o básicos, aquellos que hemos denominado más *potentes*.

1.4. La teoría de proyecto de estructuras

Una teoría sobre el proyecto de estructuras trata de describir las cualidades estructurales que cabe obtener en tipos y formas en base a las cualidades propias de dichos tipos y formas, previamente a la definición y análisis detallado de las correspondientes estructuras. Trata de extraer información rigurosa sobre el comportamiento de las estructuras a partir de las cualidades más generales y de mayor *potencia* de las formas estructurales, exigiendo la mínima *precisión* compatible con la deducción de conclusiones válidas para el tipo o la forma explorada. De este modo dicha teoría se convierte en una herramienta útil en las fases de concepción de la estructura, potenciando y pudiendo sustituir en algunos casos la experiencia del diseñador.

Este texto, tras realizar un recorrido por los métodos de análisis apropiados al estudio de las estructuras de edificación, y por sus generalizaciones más provechosas, hace uso sistemático del análisis, tanto en aplicaciones particulares como en aplicaciones de índole más abstracta y general, para extraer procedimientos o relaciones que permitan expresar ideas, no ya sobre estructuras particulares que resuelven un cierto problema y sobre cómo lo resuelven, sino sobre clases de estructuras capaces de resolver dichos problemas, considerando sus semejanzas y sus diferencias. En la medida en que se avanza en dicha clase de relaciones, lo que se trata no es ya de una teoría de análisis de estructuras, sino de una teoría que permite clasificar y cualificar clases de estructuras, que permite predecir los comportamientos de las estructuras pertenecientes a tales clases.

En dicho desarrollo, puesto que los requisitos funcionales o estructurales que ha de resolver cualquier estructura aplicada a un cierto problema son iguales, o al menos comparables, pueden imaginarse proyectadas totalmente todas las variantes tipológicas y formales posibles que corresponden a la evolución de uno o varios de los parámetros geométricos que se consideren relevantes, y pueden obtenerse conclusiones procedentes de la comparación entre dichas variantes. Puesto que todas las estructuras alternativas han de satisfacer con igual rigor los requisitos establecidos —la resistencia o rigidez deben asegurarse con idénticos criterios de seguridad—, se impone un elemento de comparación ajeno a la satisfacción de éstos. Dicho requisito *estructural* no es otro que la eficiencia con que la estructura resuelve el problema acometido. Serán preferidas las soluciones de mayor eficiencia frente a las de menor, y la medida *cuantitativa* de la eficiencia alcanzada tratará de predecirse a partir de los parámetros básicos de la forma elegida.

Este objetivo exigirá una caracterización rigurosa del concepto u objeto con el que trataremos de medir la eficiencia, así como un desarrollo teórico posterior —en lo posible contrastado experimentalmente— que permita poner en relación las medidas de este objeto con los parámetros libres en las fases de diseño, y en especial con aquellos de mayor potencia en el mismo y que requieran la menor precisión de diseño posible. En esto consiste precisamente lo que hemos dado en llamar *teoría de proyecto de estructuras*.

La parte final de este texto estará destinada, precisamente, a describir los resultados alcanzados en dicha teoría, y aplicarlos a la caracterización del comportamiento de estructuras estándares en edificación, mejorando de este modo la capacidad para entenderlas.

Capítulo 2

Bases del análisis

En este capítulo se describen los conceptos que constituyen la base de la descripción del comportamiento estructural, y que forman el cuerpo de los métodos de análisis, y sus relaciones mutuas. Se definen, pues, las condiciones de equilibrio, de compatibilidad, y las de constitución de los materiales estructurales, presentes en diferentes formatos en todos los modelos de análisis, ya sean elásticos o plásticos.

Se revisan las relaciones entre dichas condiciones, y las magnitudes agregadas que pueden construirse a partir de ellos utilizando los conceptos de energía y trabajo.

Dichos conceptos permiten reformular las leyes del comportamiento estructural en forma muy general a partir del conocido principio de los trabajos virtuales. De este modo puede cerrarse el conjunto de términos básicos empleados en el análisis en un esquema conceptual extremadamente estable y expresivo, y capaz de dar cuenta de buen número de desarrollos teóricos diferenciados.

2.1. El modelo estructural

En este apartado se establecen los términos y la simbología necesaria para definir un modelo de una estructura, puesto que la descripción de su comportamiento exige su existencia previa, y es al modelo al que se aplican las herramientas del análisis.

Geometría

En general, una estructura estará constituida por un conjunto de elementos materiales de cualidades y geometría conocida antes de su puesta en carga. El volumen o volúmenes ocupados por el material puede denotarse por Ω, —podrían usarse subíndices para clasificar regiones en dicho volumen— en tanto que la superficie exterior de dicho volumen puede denotarse por Γ como en parte de la literatura clásica. Dicha geometría está definida en un espacio tridimensional —pueden considerarse simplificaciones bidimensionales o unidimensionales—, espacio denotado por las coordenadas cartesianas $\boldsymbol{X}$, siendo $\boldsymbol{X} = x_i = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

Acciones, reacciones, y desplazamientos de la estructura

Tanto el volumen de la estructura como su superficie exterior estará sometido en cada instante a fuerzas externas, que pueden suponerse distribuidas de algún modo —fuerzas superficiales o presiones ejercidas sobre superficies exteriores o interiores de la estructura, o fuerzas de masa o inerciales correspondientes a elementos de volumen de ésta, pudiendo considerarse fuerzas puntuales que serán en general concentraciones altas de alguna de las anteriores—. Denotaremos en general a dichas fuerzas externas por $\boldsymbol{F}$, y dependerán del punto y el instante considerado: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t)$[1].

Las fuerzas externas a la estructura tienen dos orígenes diferenciados, siendo conocidas como acciones y reacciones, como luego veremos.

En virtud de las fuerzas exteriores a la estructura, ésta tiende a moverse, de modo que cada punto material, de coordenadas $\boldsymbol{X}_0$ antes de la carga —en el instante 0— pasa a una posición próxima $\boldsymbol{X}_t$ en el instante t, desplazándose, por lo tanto en dicho movimiento una magnitud denotada por $\boldsymbol{U}$, siendo evidente que $\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_0$. .

La función estructural exige en sus aplicaciones *inmuebles* que dicho movimiento esté coaccionado en alguna región de la superficie Γ_s o del volumen Ω_s de la estructura, región a la que denominamos *sustentación*. En la literatura clásica es usual referirse a la sustentación sólo como una parte de la superficie exterior de la estructura, y no comp parte del volumen de ésta, pues siempre puede eliminarse del modelo estructural cualquier punto *sustentado* o coaccionado, dejando sólo los de contacto con la región no sustentada. La estructura está formada entonces por un volumen Ω delimitado por una superficie Γ que puede descomponerse en dos partes separadas, la superficie correspondiente a la sustentación, y la superficie denominada libre, $\Gamma = \Gamma_s \cup \Gamma_l$, siendo $\Gamma_s \cap \Gamma_l = \emptyset$.

Respecto de la sustentación supondremos —al menos inicialmente— una coacción perfecta, es decir, una coacción que impide totalmente su movimiento: $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{0}; \forall \boldsymbol{X} \in \Gamma_s$. Más adelante podrá analizarse lo que sucede en caso de coacción imperfecta, o de movimiento impuesto a través de la sustentación a la estructura.

Ahora podemos distinguir entre las acciones y las reacciones: las primeras son las ejercidas sobre la estructura por elementos externos, por el uso, los agentes atmosféricos, etc. Son las conocidas acciones gravitatorias, de viento, o sísmicas, ..., mientras que las reacciones son las que aparecen ejercidas por el elemento que coacciona el movimiento de la estructura, usualmente el terreno.

De este modo la estructura tiene regiones en las que existe movimiento $\boldsymbol{U}$, que no es conocido antes de proceder al análisis de la estructura, y sobre las que se ejercen cargas o acciones $\boldsymbol{F}$ que sí son conocidas previamente a dicho análisis, aunque pueden ser nulas en alguna región de la estructura. Se denominan regiones libres de la estructura, aun cuando no son en rigor libres realmente, pues su movimiento debe acompañar al del resto de la estructura. Pero no sufren coacciones externas a la estructura misma. Tiene además regiones en las que, por el contrario, se conoce el movimiento inicial de la estructura $\boldsymbol{U}_s$, movimiento

[1] La determinación de la posición de un cierto punto material tras la carga puede hacerse tanto referenciando su posición *antes* de la carga, como después de ella. En edificación es usual referirse a la posición original, usándose $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0, t)$ es decir, se identifica la carga aplicada en el instante t al punto de coordenadas iniciales $\boldsymbol{X}_0$. Esto facilita la identificación del punto material considerado, pero puede originar confusiones cuando los desplazamientos del mismo no son despreciables, pues en dicho caso la carga actúa físicamente en $\boldsymbol{X}_t$.

que puede considerarse nulo, por estar coaccionado por elementos ajenos a la estructura misma, mientras que se desconocen las fuerzas de reacción que entran en juego necesariamente para restringir —para anular— dicho movimiento.

Hay que señalar que desde la perspectiva geométrica, tanto el movimiento $\boldsymbol{U_X}$ como la acción $\boldsymbol{F_X}$ que corresponde a cada punto $\boldsymbol{X}$ está representado por una magnitud vectorial de tres dimensiones, longitudes una, fuerzas la otra —definidas en su caso como densidad de fuerza por unidad de superficie (presión) o de volumen—, de modo que puede considerarse con propiedad el producto escalar de una magnitud por la otra como un trabajo —densidad de trabajo por unidad de superficie o de volumen en su caso—. Veremos más adelante que dicho producto, dicho trabajo, está cargado de sentido. En resumen, en todo punto hay dos magnitudes —vectoriales—, una conocida y otra desconocida antes de proceder al análisis, ambas tienen igual número de componentes, y su producto es un trabajo.

A menudo los modelos estructurales responden a simplificaciones de lo descrito anteriormente, mediante el sencillo recurso de generar *agregados*, o sumas: por ejemplo un soporte vertical cilíndrico, macizo, y de área A, sometido a presión uniforme τ en la sección correspondiente a su cúspide, y sustentado en su base, es un elemento de tres dimensiones que puede reducirse a una línea —se elige la que une los centros de gravedad de las secciones, o directriz de la pieza— sometida a una carga en su punto superior $F = \int_A \tau dA = \tau A$, y sustentada en su punto inferior. Esto reduce la dimensión del problema —el conjunto de puntos a considerar en el análisis—.

En este caso el agregado se realiza mediante los concepto de sección y rebanada, siendo la sección la superficie que agrupa a todos los puntos de un corte realizado perpendicularmente a la directriz, y rebanada el volumen situado entre dos secciones infinitamente próximas. La carga sobre el modelo simplificado se obtiene *acumulando* todas las ejercidas sobre la sección extrema cargada en el modelo original. Mejor que acumulando debiera decirse *identificando*, es decir, sustituyendo el conjunto de las cargas ejercidas sobre la sección original por una resultante equivalente a todas ellas, y situada en el punto seleccionado. Se eligen para localizar las rebanadas los puntos que se sitúan en la directriz. En general —caso de ser las cargas excéntricas, por ejemplo— el equilibrio exige que el *agregado* o resultante de las cargas incluya momentos, dado que un sistema de fuerzas *trasladado* a un punto requerirá ser representado en él por tres componentes de fuerza y tres de momento.

El movimiento de la rebanada será el que represente el de su conjunto, definido por el movimiento de sus secciones que se supone mantienen su geometría pero no su posición. De este modo, la parte de movimiento rígido de la rebanada —excluida la deformación, que será la diferencia de movimiento de las secciones que la definen— estará compuesto de un desplazamiento —tres componentes— y una rotación —nuevamente tres componentes—[2]. De este modo, nuevamente las acciones $\boldsymbol{F}$, que ahora incluyen tres componentes de fuerza y tres de momento en el caso general, y los movimientos $\boldsymbol{U}$, con tres componentes de desplazamiento y tres de rotación, mantienen la correlación en sus sentidos físicos, de modo que otra vez puede obtenerse un trabajo como producto escalar de unas por otros, y, puesto que construimos dicho agregado como simplificación de la

[2] Es importante que la elección del punto de referencia elegido sea inequívoca para cualquier desarrollo posterior. Por ello se emplea de forma sistemática el centro de gravedad de la sección, que está siempre unívocamente determinado.

estructura, y no como alteración de ésta —puesto que tanto las fuerzas como los movimientos en ambos modelos no son más que representaciones alternativas de lo mismo— el trabajo acumulado obtenido en ambos será idéntico. Volveremos sobre esta cuestión más adelante. Baste ahora con considerar a $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{U}$ como representaciones generalizadas de las acciones y los movimientos en cualquier modelo estructural, recordando la relación existente entre las componentes de las unas y de los otros[3].

Los vectores $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{U}$ agrupan la totalidad de las acciones y desplazamientos relevantes del modelo estructural, manteniendo la correspondencia en las posiciones de unas y otros. El índice que los recorre señala, en la misma posición en cada uno de los dos vectores, a la misma componente de fuerza o de desplazamiento, y correspondiendo al mismo punto, de modo que el producto escalar $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{F}$ tiene sentido. Por ejemplo, en estructuras en las que la carga se hubiese aplicado en su totalidad en la posición inicial de la estructura, dicha magnitud mediría el trabajo realizado hasta la posición de equilibrio final, es decir, mediría la pérdida de energía potencial de la carga aplicada, al moverse la estructura.

Esfuerzos y deformaciones internas

Como resultado de las acciones y de los movimientos a que la estructura se ve sometida, la geometría de ésta se deforma, y sus distintas regiones se ven sometidas a esfuerzos internos. Denotaremos por $\boldsymbol{f}$ a los esfuerzos internos, y por $\boldsymbol{u}$ a las deformaciones internas[4]. Si el modelo estructural es un volumen tridimensional, dichos esfuerzos internos y deformaciones corresponden respectivamente a los tensores de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ que estudia la teoría

[3] Tanto fuerzas como movimientos están descritos sobre el conjunto de puntos que representa la estructura. Si este conjunto es infinito, se tratará de un modelo continuo, y la definición de la carga estará hecha como densidad —salvo en caso de cargas puntuales como límite de cargas distribuidas cuando la región en que se distribuyen tiende a una dimensión nula— por lo que emplearemos como unidades componentes de fuerza (o de momento) por unidad de longitud, o de superficie, o de volumen. Si el conjunto de puntos es finito, se tratará de un modelo discreto, y la carga será siempre de carácter puntual sobre dichos puntos, con unidades de fuerza o de momento. Por ahora consideramos indistintamente ambos casos, aun cuando, en rigor, podríamos denotar las funciones de carga o desplazamiento en los casos continuos con símbolos diferenciados. En caso de necesidad emplearemos $\boldsymbol{\tau}$ para las funciones que representan las cargas y $\boldsymbol{v}$ para las que representan los desplazamientos

[4] Nuevamente podrá darse el caso de que queramos distinguir entre una descripción restringida a un conjunto finito de valores, asociados al correspondiente conjunto de puntos, o una descripción generalizada a un conjunto infinito de puntos a través de las correspondientes funciones. Usaremos $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ para los esfuerzos y $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$ para las deformaciones, reservando las letras griegas para la descripción distribuida mediante funciones o familias de funciones, aunque seguiremos con letras latinas si no hay necesidad de precisar.

de la elasticidad[5] siendo, en los casos de pequeñas deformaciones,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} ; \ \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & \varepsilon_y & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} ; \tag{2.1}$$

donde (x, y, z) no son más que las tres coordenadas cartesianas consideradas antes, las tensiones normales y tangenciales se representan como es usual en elasticidad, mediante las componentes de presión sobre las tres caras de un cubo elemental que rodea al punto, y las deformaciones incluyen los alargamientos ε_i y las componentes de distorsión $b_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$.

Para nuestra representación podemos suponer representado el conjunto de esfuerzos $\boldsymbol{f}$ como un vector cuyas componentes son las del tensor considerado[6]: $\boldsymbol{f} = (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z)$, y análogamente para las deformaciones $\boldsymbol{u} = (\varepsilon_x, b_{xy}, b_{xz}, b_{yx}, \varepsilon_y, b_{yz}, b_{zx}, b_{zy}, \varepsilon_z)$. Alternativamente podríamos considerar la simetría de ambos tensores y representar $\boldsymbol{f} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$; $\boldsymbol{u} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$[7], en un formato muy usual.

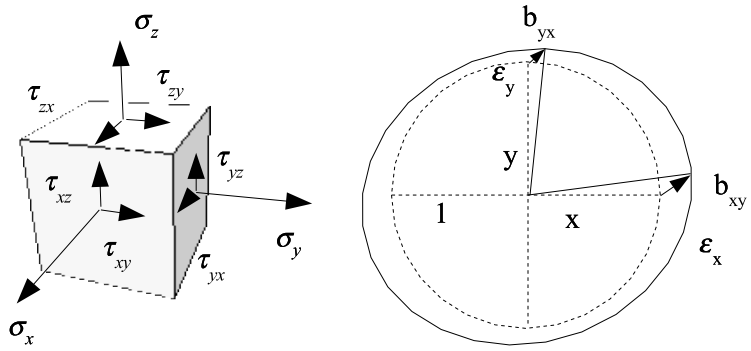


Figura 2.1: Tensiones y deformaciones del punto

[5]Consúltese alguno de los texto clásicos de esta teoría, como [Timoshenko, 1934] o [García de Arangoá, 1964]. Del autor es [Cervera, 1987]. Versiones más actuales y extensas de la teoría de la elasticidad usadas en cursos avanzados, como [Valiente Cancho, 2000], suelen abordar desde el inicio la teoría necesaria para problemas grandes deformaciones, derivando de éstas las propiedades de la elasticidad para pequeñas deformaciones. Aunque rigurosos y de extrema utilidad para el conocimiento en detalle de materiales o problemas mecánicos actuales –como los asociados a la biomecánica– resultan sin embargo innecesariamente complejos para abordar los problemas habituales en las estructuras de edificación. Para éstas, sin embargo, los conceptos clásicos que soportan la teoría en pequeñas deformaciones, y entre éstos los asociados a la comprensión de las propiedades de las magnitudes de carácter tensorial frente a los cambios del sistema de referencia, junto con el manejo de los instrumentos clásicos desarrollados para dicha comprensión —el Círculo de Mohr— resultan de gran utilidad.

[6]Una representación clásica alternativa a la propuesta y de mayor potencial expresivo, aunque de mayor dificultad de manejo, es la tensorial, que tiene grandes ventajas para la representación compacta de objetos complejos, pero en ella las relaciones de rigidez material se formulan con objetos de cuatro dimensiones. La estrategia adoptada aquí permite que las relaciones de rigidez empleadas resulten siempre expresadas mediante matrices de dos dimensiones.

[7]representación en la que hemos acumulado las medias distorsiones $b_{ij} + b_{ji} = \gamma_{ij}$, $b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$, de modo que la densidad de trabajo de deformación obtenida en cualquiera de las representaciones a partir del producto escalar de deformaciones por tensiones se mantenga invariable.

En modelos agregados, por ejemplo en estructuras lineales de barras, los esfuerzos corresponden a las resultantes en una rebanada completa, acumulando todas las tensiones obtenidas en una de las dos caras de la rebanada, resultando usualmente en los casos de estructuras lineales planas cargadas en su plano los conocidos esfuerzos normal, momento y cortante $\boldsymbol{f} = (N, M, T)$, mientras que las deformaciones corresponden a las de dicha rebanada a saber, alargamiento, cambio de curvatura[8] y distorsión $\boldsymbol{u} = (\varepsilon, c, \gamma)$, o más sucintamente, en modelos que suponen que la rebanada se mantiene plana y que deducen directamente el cortante de la variación en la ley de momentos, los esfuerzos representados serán $\boldsymbol{f} = (N, M)$ y las deformaciones $\boldsymbol{u} = (\varepsilon, c)$.

Esfuerzos $\boldsymbol{f}$ y deformaciones $\boldsymbol{u}$ se establecen de modo que se respeta la correspondencia de componentes ya apuntada al hablar de fuerzas y desplazamientos: en el estudio teórico de la región elemental considerada se eligen y ordenan las componentes de ambas magnitudes de forma que el producto escalar $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f}$ tiene sentido físico de trabajo.

Hay que recalcar la diferencia conceptual básica que existe entre las fuerzas, acción o reacción, y los esfuerzos o solicitaciones internos: si consideramos una barra corta, recta, y comprimida en sus dos extremos, el esfuerzo interno de toda rebanada interior de la barra es idéntico desde el punto de vista físico y geométrico, mientras que las fuerzas ejercidas en ambos extremos de la barra son, aunque iguales, de sentido opuesto. La diferencia estriba en que toda acción sobre la estructura tiene un sentido único, al que se opone una respuesta contraria desde la estructura, lo que no sucede en el caso del esfuerzo interno. Todo esfuerzo interno se determina usualmente extrayendo una región elemental de la estructura, y observando todas las fuerzas —en equilibrio— que actúan sobre ella: en el caso tridimensional de la teoría de la elasticidad, un cubo elemental, y en el caso de las barras, la rebanada. En dicha región existen caras opuestas sobre las que se ejercen fuerzas iguales y de sentido opuesto. Medimos el esfuerzo por el valor de las fuerzas sobre una de las caras de la pareja, elegida convencionalmente, pero este hecho no debe ocultar el sentido físico del esfuerzo mismo, muy diferente del de la fuerza que se aplica a dicha cara. Podemos decir que la rebanada está comprimida porque las fuerzas tratan de acercar ambas caras. La versión española tan en boga del término con que se denomina a la tensión en el mundo anglosajón, *stress*, es bien expresiva: la rebanada queda *estresada* a lo largo de toda su longitud por razón de las fuerzas de signo contrario ejercidas sobre sus caras. En general siempre podemos observar ese doble signo de la solicitación que da origen al *estrés* o esfuerzo interno si consideramos alternativamente las fuerzas ejercidas por el resto de la estructura sobre la región analizada, o las ejercidas por dicha región sobre el resto de la estructura. Podemos recordar que el término *tensión* es equivalente en sentido al anterior, y distinto del de *presión*, para mantener la denominación tradicional.

En regiones extensas el esfuerzo interno tiene carácter análogo al de la tensión en un punto, pero es ahora una magnitud resultante —un agregado—. Por unidad de lenguaje, en este texto denominamos en lo sucesivo esfuerzo interno a dicho *estrés* interno, mientras que usaremos el término solicitación para referirnos a alguna de las acciones de la estructura sobre la región objeto de análisis, una de las dos partes del esfuerzo en juego, usando para ellos el símbolo $\boldsymbol{f}$ si no hay posibilidad de confusión, o los símbolos $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{S}$ respectivamente en caso

[8] o sencillamente curvatura en tramos inicialmente rectos

contrario.

El doble carácter del esfuerzo y de la solicitación puede observarse también en cuanto consideramos las deformaciones, que pueden verse bien internamente como efecto del *estrés*, del esfuerzo interno, o bien como movimientos de unas partes de la región respecto de otras: el ejemplo de la rebanada es significativo: sometida a momento, la deformación interna es la curvatura, que implica que cada cara de la rebanada presenta un giro relativo respecto de la otra. La curvatura es una propiedad de punto, de unidades inversas a las de longitud, mientras que los giros se miden en unidades angulares —adimensionales—. En este caso es más evidente aún la diferencia: la curvatura se predica de todos y cada uno de los puntos de la longitud de la rebanada, mientras que los giros de las caras se refieren sólo a éstas. Ambos términos se igualan numéricamente si se consideran tramos de longitud unidad: el alargamiento unitario en uno de tales tramos coincide con el alejamiento relativo de una cara respecto de la otra.

Hemos señalado que, al igual que en el caso de las acciones y las reacciones, a menudo los esfuerzos internos se describen en forma agregada: un ejemplo ya citado es el de los alargamientos y curvatura de las rebanadas, que resultan de la consideración conjunta de todos los alargamientos diferentes de las distintas fibras que la componen. Al construir dichos agregados se asegura que el trabajo representado por las sumas extendidas a cualquier región de la estructura del producto escalar $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f}$ se mantenga en las distintas representaciones.

Pueden imaginarse —y de hecho se emplean con profusión— agregados de mayor calado, como son las barras individuales en una estructura, y en este caso se expresa la totalidad de sus esfuerzos o deformaciones a partir de unos pocos parámetros, como son sus fuerzas de extremo y los movimientos relativos de sus extremos, pudiendo llegarse a la situación en que los vectores de esfuerzos $\boldsymbol{f}$ y de deformaciones $\boldsymbol{u}$ —que serán ahora más claramente vectores que agrupan solicitaciones de extremo y movimientos relativos entre extremos— contengan en sus componentes elementos suficientes para representar la totalidad de los esfuerzos internos de la estructura completa. Más adelante veremos varios ejemplos correspondientes a uno de los modos de formular el análisis matricial de estructuras de barras. En ese caso, el producto escalar de ambos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{f}$ mide, a salvo del factor 1/2 si el comportamiento es elástico–lineal, la energía de deformación total de la estructura.

Hasta aquí hemos definido las características geométricas, posiciones, etc., y mecánicas, fuerzas y movimientos, de una estructura genérica.

En los apartados siguientes estableceremos las condiciones que hacen que dichas cualidades respondan a las requeridas en una estructura, a saber, el triple conjunto constituído por las condiciones de admisibilidad: el equilibrio, la compatibilidad, y las llamadas ecuaciones de constitución de los materiales estructurales o condiciones de admisibilidad material. Dichas condiciones permiten formular las ecuaciones que determinan la solución al problema estructural, y cuya formulación y solución es el objeto del análisis.

2.2. Equilibrio o admisibilidad estática

Las condiciones de equilibrio son sencillas de formular verbalmente: si se considera una región arbitraria cualquiera de una estructura, región que puede alcanzar a la estructura completa, el conjunto de fuerzas aplicadas a dicha re-

gión, incluyendo las externas aplicadas a la propia región, y las aplicadas como solicitaciones por el resto de la estructura a la misma a través de la superficie común, deben tener resultante nula.[9]

Las condiciones de equilibrio se aplican a la región deformada, considerada como si fuese un sólido (ya) indeformable sometido al conjunto de fuerzas enunciado, y consisten en las conocidas seis ecuaciones del equilibrio en sólidos tridimensionales, a saber, las tres de equilibrio de fuerzas en las tres direcciones del espacio, y las tres de equilibrio de momentos en torno a tres ejes ortogonales entre sí, y situados en un punto arbitrario y elegido previamente.

Es usual en estas ecuaciones considerar separadamente las acciones externas $\boldsymbol{F}$ de las solicitaciones ejercidas sobre la región que se aísla para el análisis, $\boldsymbol{S}$, solicitaciones que en las superficies de sustentación corresponden a las reacciones ejercidas por la sustentación sobre la estructura. En este caso las ecuaciones genéricas de suma de fuerzas nula, y suma de momentos nulo suele escribirse en el formato $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{S} = 0$, equivalente a $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{S}$ que expresa que la resultante de las fuerzas aplicadas, y la resultante de las solicitaciones aplicadas a la región deben ser iguales y contrarias para que exista el equilibrio.

En el análisis del equilibrio es usual considerar efectos resultantes —de secciones concretas, de partes de la estructura, o de la estructura completa— y, puesto que se trata de ecuaciones sobre regiones consideradas a estos efectos como sólidos rígidos, dichas resultantes tendrán en general seis componentes —fuerzas y momentos— si la región es de tamaño finito en alguna de sus dimensiones. Sólo en el caso de que la región analizada sea de tamaño puntual se considerarán en el equilibrio sólo las tres componentes de fuerza —o de densidad de fuerza— aplicadas precisamente en dicho punto[10].

Resultantes. Representación

Es útil considerar maneras alternativas de representar las seis componentes de fuerza y momento. Considerémoslas referidas a un punto dado. Las tres componentes de fuerza se sitúan sobre dicho punto, y las tres de momento sobre ejes ortogonales situados en él[11].

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}_0} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{M})_{\boldsymbol{X}_0} = (F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)_{\boldsymbol{X}_0}$$

El origen y ejes de referencia se sitúan en $\boldsymbol{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$[12].

Si trasladamos el punto de referencia a otra posición, $\boldsymbol{X} = (x, y, z)$, asegurar la equivalencia de la nueva representación de la fuerza y la representación original exigirá que se cumplan las ecuaciones de equilibrio necesarias para que

[9] En el caso de estructuras en movimiento, deben incluirse entre dichas acciones las fuerzas de inercia.

[10] Aunque pueden concebirse modelos teóricos en los que el momento se aplica de forma puntual, por ejemplo para representar fenómenos de polaridad molecular, no se emplean tales modelos en el análisis clásico de estructuras.

[11] Para asegurar la consistencia en los signos, consideramos siempre signos positivos para los sentidos correspondientes a los valores crecientes en los ejes: la cara positiva de una rebanada será la de coordenada mayor, y la tracción en dicha cara es, por tanto, de signo positivo. Los momentos positivos en torno al eje $\boldsymbol{X}$ llevan el $\boldsymbol{Y}$ sobre el $\boldsymbol{Z}$, los positivos en torno al eje $\boldsymbol{Y}$ llevan el $\boldsymbol{Z}$ sobre el $\boldsymbol{X}$, y los positivos en torno al eje $\boldsymbol{Z}$ llevan el eje $\boldsymbol{X}$ sobre el $\boldsymbol{Y}$.

[12] Esta representación no supone, por supuesto, que dichas fuerzas se ejerzan materialmente sobre dicho punto, sólo establece la equivalencia entre las fuerzas consideradas con la resultante que las representa en dicha referencia.

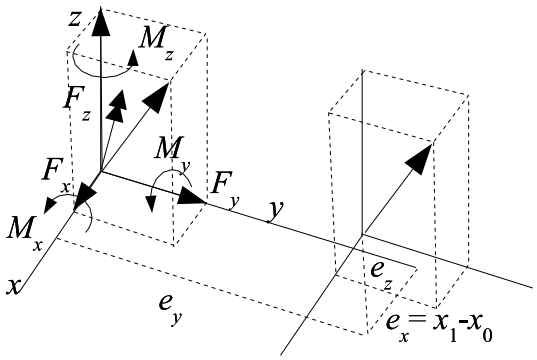


Figura 2.2: Traslación del punto de referencia

$\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}_0} = \mathcal{F}_{\boldsymbol{X}_1}$, es decir, para que ambas sean representaciones de un mismo objeto. Lógicamente las componentes en dichas representaciones son numéricamente distintas; por ejemplo, en el caso de ejes paralelos en los dos puntos, las componentes definidas en el segundo punto se obtienen con las conocidas expresiones de la traslación

$$\begin{aligned}
F_{x_1} &= F_{x_0} \\
F_{y_1} &= F_{y_0} \\
F_{z_1} &= F_{z_0} \\
M_{x_1} &= M_{x_0} + F_{y_0}(z_1 - z_0) - F_{z_0}(y_1 - y_0) \\
M_{y_1} &= M_{y_0} + F_{z_0}(x_1 - x_0) - F_{x_0}(z_1 - z_0) \\
M_{z_1} &= M_{z_0} + F_{x_0}(y_1 - y_0) - F_{y_0}(x_1 - x_0)
\end{aligned}$$

ecuaciones que, dicho sea de paso, pueden formularse mediante la expresión matricial

$$\begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{z_1} \\ M_{x_1} \\ M_{y_1} \\ M_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 - z_0 & -(y_1 - y_0) & 1 & 0 & 0 \\ -(z_1 - z_0) & 0 & x_1 - x_0 & 0 & 1 & 0 \\ y_1 - y_0 & -(x_1 - x_0) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x_0} \\ F_{y_0} \\ F_{z_0} \\ M_{x_0} \\ M_{y_0} \\ M_{z_0} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Si en vez de trasladar el punto de referencia, lo que hacemos es rotar los ejes de referencia, lo que tenemos es la conocida ecuación:

$$\begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{z_1} \\ M_{x_1} \\ M_{y_1} \\ M_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{xx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x_0} \\ F_{y_0} \\ F_{z_0} \\ M_{x_0} \\ M_{y_0} \\ M_{z_0} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

en la que es fácil comprobar que las componentes de momento se proyectan de forma análoga a las componentes de fuerza, siendo los α_{ij} los cosenos directores correspondientes a proyectar las componentes en i sobre las j —ejes de

la representación original y la transformada respectivamente—. Debido a dicha analogía es usual representar gráficamente los momentos como vectores de dos puntas, en los que la dirección del vector representa el eje en torno al que se ejerce el momento, y su magnitud, la del momento ejercido, pudiendo operarse con ellos analítica o gráficamente como con las fuerzas, siempre que no se produzca desplazamiento del punto de referencia.

Se ve en expresiones anteriores que las componentes de fuerza no dependen de las de momento, lo que no es recíproco: las componentes de momento varían con la posición si las componentes de fuerza no son nulas. De este modo una *estrategia de representación* que se emplea con cierta frecuencia consiste en *buscar como punto de referencia alguno para el que se anulen una o varias de las componentes de momento*. Supongamos por ejemplo que el plano XY es el plano horizontal en que se sitúa la cimentación de un cierto elemento estructural: es útil representar la carga de dicho elemento sobre la cimentación en el punto de dicho plano para el que se anulan los momentos M_x, M_y. Éste sería *el punto de aplicación de la resultante de la carga sobre la cimentación*, y las distancias a la directriz del elemento estructural, las *excentricidades* de la carga. De este modo, las componentes de fuerza, que no cambian, y las excentricidades, estarían representando parte de la resultante: las componentes de fuerza, y su *punto de paso* por el plano. Nótese que para que esto sea posible, es necesario —y suficiente— que la componente F_z ortogonal al plano sea no nula, pues de lo contrario la fuerza sería paralela al plano. Dicha estrategia de representación se emplea también en elementos comprimidos con flexiones asociadas —pilares, arcos, etc.— y, en este caso, el plano al que se refiere la resultante es el plano que representa una sección en estudio: en este caso la existencia de compresión, ortogonal al plano, asegura la condición necesaria para poder emplear la representación planteada.

Es fácil comprender que la representación definida es aún insuficiente para dar cuenta de las seis componentes de la resultante del sistema de fuerzas, pues sólo contamos con tres componentes de fuerza y dos excentricidades —correspondientes a los momentos flectores cuando hablamos de los esfuerzos de una sección— por lo que falta aún la componente necesaria para expresar el momento *torsor* en torno al eje ortogonal al plano y situado en el punto de paso de la resultante. Aunque en estructuras de edificación dicha componente de torsión suele ser poco o nada relevante[13], no puede ignorarse y si, por ejemplo, se pretende elaborar un sencillo programa para dibujar en tres dimensiones las resultantes de un cálculo como forma de resumir gráficamente los resultados obtenidos, deberá ser tenida en cuenta.

Hay muchos formatos posibles para representar dicha sexta componente. El modo canónico consiste en imaginarla como un momento torsor aplicado en torno al eje definido por la dirección y posición de la resultante (tal como resulta dada por sus otras cinco componentes, las tres de fuerza y las dos de posición). De este modo la resultante puede imaginarse desplazándose sobre su eje, sin alteración en dicha componente. La resultante será entonces equivalente a un *vector deslizante* más el torsor en torno a él. Dicho eje se denomina en algunos texto clásicos *eje central del sistema* y corresponde al lugar geométrico de los

[13] Veremos que el comportamiento en torsión es el menos eficaz de todos los disponibles para equilibrar cargas, de modo que si la estructura dispone de mecanismos alternativos, las torsiones desarrolladas son de pequeña magnitud. Sólo aparecerán torsiones apreciables cuando sean imprescindibles para el equilibrio, a costa de asumir eficacias estructurales reducidas.

puntos para los que el momento resultante es mínimo —pues en efecto en cualquier otro punto el momento resultante estará compuesto por dicho torsor más el momento que ejerce en dicho punto la resultante situada en el eje central—

Vamos a repasar esta representación, en la que la resultante tendrá como componentes F_x, F_y, F_z con excentricidades en el plano XY de valores $e_x = x_1 - x_0$, $e_y = y_1 - y_0$ respecto de un punto de referencia en dicho plano —que probablemente represente la intersección de la directriz de la pieza considerada con dicho plano—. Tendremos $z_1 = z_0$, puesto que se trata de dos puntos en un mismo plano. A dicha fuerza y posición se añadirá el torsor en torno a ella. El torsor en torno al eje definido por la resultante tendrá tres componentes que deberán ser proporcionales a las F_x, F_y, F_z dado que el eje de rotación es el eje de acción de dicha fuerza resultante. Por ello representaremos al torsor, de magnitud t mediante el factor de proporcionalidad τ, definido de modo que sus componentes, paralelas al vector unitario $\left(\frac{F_x}{|\boldsymbol{F}|}, \frac{F_y}{|\boldsymbol{F}|}, \frac{F_z}{|\boldsymbol{F}|}\right)$ sean $\left(\frac{tF_x}{|\boldsymbol{F}|}, \frac{tF_y}{|\boldsymbol{F}|}, \frac{tF_z}{|\boldsymbol{F}|}\right) = (\tau F_x, \tau F_y, \tau F_z)$. Hay que señalar que puede interpretarse τ como una especie de excentricidad, sin más que suponer sustituido el torsor por un par de fuerzas de módulo igual al de la resultante, situadas en un plano perpendicular a ésta, y separadas por el brazo τ[14].

De este modo la resultante queda definida por sus componentes de fuerza, el eje de acción de ésta, que queda definido por su intersección por un plano cualquiera —por dos coordenadas en dicho plano— y por la excentricidad en torsión. La resultante definida antes por

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}_0} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{M})_{\boldsymbol{X}_0} = (F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)_{\boldsymbol{X}_0} \tag{2.4}$$

[14]Es fácil determinar su valor. Puesto que las componentes de fuerza son invariables, consideramos sólo las de momento, siendo el problema el de determinar las excentricidades y el torsor a partir de las componentes de la resultante, que se suponen conocidas y referidas al punto $\boldsymbol{X}_0$.

Tenemos pues, según la ecuación 2.2

$$\begin{aligned} M_{x_1} &= \tau F_x = M_{x_0} - F_z e_y \\ M_{y_1} &= \tau F_y = M_{y_0} + F_z e_x \\ M_{z_1} &= \tau F_z = M_{z_0} + F_x e_y - F_y e_x \end{aligned}$$

que puede escribirse también en la forma

$$\begin{aligned} M_{x_0} &= F_z e_y + \tau F_x \\ M_{y_0} &= -F_z e_x + \tau F_y \\ M_{z_0} &= +F_y e_x - F_x e_y + \tau F_z \end{aligned}$$

o, en formato matricial

$$\begin{bmatrix} M_{x_0} \\ M_{y_0} \\ M_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & F_z & F_x \\ -F_z & 0 & F_y \\ F_y & -F_x & F_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \tau \end{bmatrix}$$

sistema de ecuaciones a partir del que pueden determinarse las excentricidades buscadas.

Para resolver el sistema basta invertir la matriz cuadrada, cuyo determinante vale $\Delta = F_x^2 F_z + F_y^2 F_z + F_z^3 = |\boldsymbol{F}|^2 F_z$, y premultiplicar con ella al vector de componentes de los momentos referidos al punto inicial, resultando

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{F}|^2 F_z} \begin{bmatrix} F_x F_y & -F_x^2 - F_z^2 & F_y F_z \\ F_y^2 + F_z^2 & -F_x F_y & -F_x F_z \\ F_x F_z & F_y F_z & F_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{x_0} \\ M_{y_0} \\ M_{z_0} \end{bmatrix}$$

La expresión permite determinar unívocamente las excentricidades buscadas siempre que la componente ortogonal al plano sea no nula, como se ha establecido más arriba y como resulta evidente de la propia expresión.

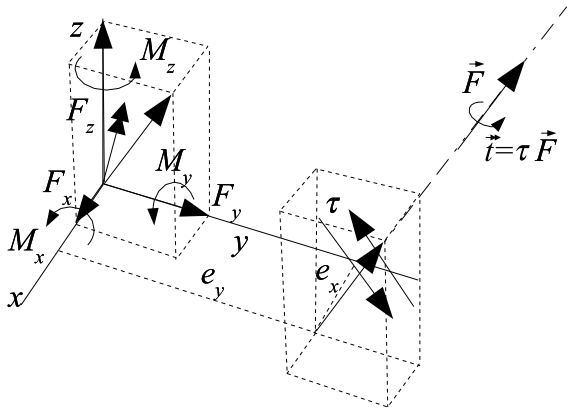


Figura 2.3: Resultante de un sistema de fuerzas en un plano

se representa ahora por

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{X}_0} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{e})_{\boldsymbol{X}_0} = (F_x, F_y, F_z, e_x, e_y, \tau)_{\boldsymbol{X}_0} \tag{2.5}$$

El origen y los ejes de referencia se sitúan en $\boldsymbol{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ localizando la intersección de la resultante en el plano $z = 0$.

Una representación alternativa que permite dar cuenta igualmente de las seis componentes, y que resulta de gran utilidad en trazados gráficos, consiste en localizar la componente *vertical* de dirección z en una posición, y la *horizontal*, de componentes x, y en otra diferente. De este modo la fuerza y los momentos se resuelven ahora en dos fuerzas separadas, una de componentes $(0, 0, F_z)$, que cruza el plano $z = 0$ en un punto de coordenadas determinadas por las excentricidades e'_x, e'_y, respecto del punto considerado, y la segunda, de valor F_h y componentes $(F_x, F_y, 0)$, desplazada perpendicularmente respecto del eje z en la distancia τ', de modo que ahora el equilibrio implica

$$\begin{aligned} M_{x_0} &= F_z e'_y \\ M_{y_0} &= -F_z e'_x \\ M_{z_0} &= \tau' F_h \end{aligned}$$

Las dos representaciones son consistentes y útiles, coincidiendo sólo en el caso de que $M_{z_0} = 0$.

Equilibrio acciones–solicitaciones.

En cualquier caso la condición de equilibrio exige que la resultante de la totalidad de las fuerzas ejercidas sobre una estructura o sobre cualquier región estructural arbitraria sea nula. Esta condición se representa usualmente separando en dos partes las fuerzas —y solicitaciones— que se ejercen sobre la estructura o región considerada y estableciendo la oposición entre las resultantes de las dos partes, sea acciones frente a reacciones, o acciones y reaciones que se ejercen sobre una región frente a las solicitaciones que el resto de la estructura ejerce sobre la región aislada.

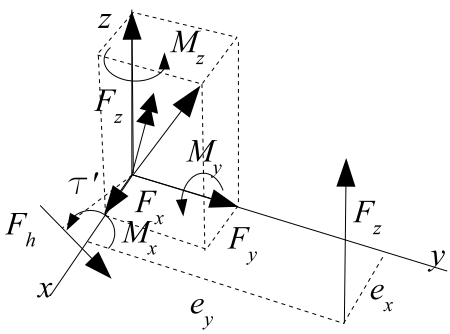


Figura 2.4: Representación diédrica de la resultante de un sistema de fuerzas

Ecuación de equilibrio generalizada

En todos los casos que estudiaremos en posteriores capítulos veremos que resulta como expresión del equilibrio una ecuación matricial, en la forma

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f} \tag{2.6}$$

Se trata de una forma que relaciona las acciones $\boldsymbol{F}$ con las solicitaciones $\boldsymbol{f}$ mediante un operador o matriz $\boldsymbol{H}$ que es característico y se determina a partir de las condiciones de equilibrio de la estructura.

Pues efectivamente, si las solicitaciones y las acciones están en equilibrio será porque sus representaciones o resultantes generales establecidas para el conjunto de regiones aisladas que caractericen la estructura serán iguales y opuestas. Como hemos visto que podemos representar resultantes de fuerzas —o de solicitaciones— en puntos arbitrarios mediante expresiones que son lineales, las ecuaciones de equilibrio resultarán ser lineales para la hipótesis de pequeños desplazamientos, en las que consideramos el equilibrio en la geometría original[15].

Hay que hacer notar que las condiciones de equilibrio deben, en puridad, analizarse en la geometría deformada de la estructura. Es decir, tanto las cargas como las solicitaciones deben considerarse aplicadas en las posiciones que alcanza la estructura una vez deformada —cuando alcanza efectivamente el equilibrio— Ahora bien cuando puede asegurarse que el efecto de la deformación de la estructura en la situación de equilibrio y en los esfuerzos es suficientemente pequeño suele despreciarse dicho efecto, simplificando el problema, y considerar como geometría de equilibrio la de la estructura sin deformar, geometría que es conocida a priori. A esta simplificación corresponden los análisis en primer orden. Las ecuaciones de equilibrio son lineales en este caso, como hemos visto, y podrán representarse en la forma matricial descrita[16].

[15] En el caso en que estemos trabajando con descripciones distribuidas de las fuerzas $\boldsymbol{\tau}$ y los esfuerzos internos $\boldsymbol{\sigma}$, las ecuaciones de equilibrio relacionan las correspondientes funciones mediante un operador lineal, de modo que podemos escribir $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\sigma})$

[16] Los problemas tendrán representaciones no lineales cuando la geometría de referencia no coincida con la del equilibrio real, situación habitual cuando se desconoce a priori la situación

En general las ecuaciones de equilibrio se establecen de forma análoga a la descrita a continuación para el caso de estructuras de barras: para cada movimiento posible de los puntos libres de la estructura —los nudos en que confluyen las barras— se igualan las fuerzas —las cargas— correspondientes a la dirección de dicho movimiento con las fuerzas de extremo de igual sentido que aparecen en las barras asociadas al punto o nudo que puede moverse —las de las regiones asociadas al mismo—.

Se consideran en este análisis por un lado las fuerzas ejercidas como cargas en las direcciones de dichos movimientos posibles —fuerzas que pueden ser nulas y entendiendo aquí el término en su sentido generalizado, de fuerzas o momentos— y por otro lado las componentes en dichos puntos y direcciones de las fuerzas de extremo de las barras —o de cualesquiera componentes en que se haya descompuesto la estructura— considerando las fuerzas de extremo que correspondan a deformaciones relevantes para su modo de trabajo —se tratará de fuerzas axiales cuando son relevantes los cambios de longitud de las barras, de momentos si los son los cambios de curvatura por flexión—.

Si la representación de la geometría del equilibrio es suficientemente precisa, la condición de equilibrio es aplicable independientemente del estado alcanzado por la estructura, tanto si continúa en régimen elástico o ha alcanzado régimen plástico en ciertas regiones. Y puede representar la situación inmediatamente anterior al colapso generalizado de la estructura si el grado de plastificación alcanzado la ha transformado en mecanismo, o si está en fase de iniciación un proceso de colapso frágil.

En problemas de estabilidad asociados a la existencia de compresiones debe analizarse, sin embargo, la pertinencia de la simplificación en la descripción de la geometría, es decir, la suposición habitual de que ésta es análoga o idéntica a la original, supuesto que deja de ser aceptable si los movimientos son relevantes. En ese caso el análisis se debe realizar estableciendo el equilibrio en la forma final, deformada, y por lo tanto incluyendo en la formulación del equilibrio los movimientos incógnita. Resultan entonces sistemas de ecuaciones no lineales que, muy a menudo, se resuelven por métodos paso a paso. Volveremos más adelante sobre la cuestión para la que será preciso considerar herramientas adicionales.

Puntos libres y puntos de sustentación

Es usual ordenar las ecuaciones de equilibrio de modo que se establezcan sucesivamente acciones y reacciones, de modo que la ecuación $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}$ se escribe del modo

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_l \\ \boldsymbol{F}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_l \\ \boldsymbol{H}_s \end{bmatrix} [\boldsymbol{f}]$$

expresión en la que, al inicio del análisis, son conocidas sólo las acciones sobre los puntos libres, $\boldsymbol{F}_l$.

Puede observarse que las ecuaciones son independientes y, en muchos tipos de análisis, se prescinde inicialmente de las correspondientes a las reacciones empleando sólo las correspondientes a los puntos libres, $\boldsymbol{F}_l = \boldsymbol{H}_l\boldsymbol{f}$.

---

deformada y ésta resulta relevante en los efectos de las cargas, sea por razón de su posición, o incluso de su magnitud.

2.3. Condiciones de resistencia

Las verificaciones habituales de la capacidad de la estructura para soportar las cargas exigen comprobar que los esfuerzos $\boldsymbol{f}$ no superan unos determinados límites o resistencias $\boldsymbol{r}$, es decir, expresiones del tipo $\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{r}$. Es usual que dichos límites se establezcan para combinaciones de esfuerzos y resulta frecuente, y útil, que tales combinaciones entre esfuerzos, o *diagramas de interacción* se representen mediante combinaciones lineales dando por ello lugar a límites que se expresan mediante condiciones del tipo $\boldsymbol{\psi f} \leq \boldsymbol{r}$. Por otro lado consideraciones de tipo constructivo o de otros tipos agrupan habitualmente las resistencias genéricas $\boldsymbol{r}$ a partir de un conjunto más limitado de resistencias básicas $\boldsymbol{r}_b$: por ejemplo aplicar sección constante unifica las resistencias de todas la secciones consideradas de una pieza, así como unificar barras unifica las resistencias entre todas ellas, etc.

De este modo es habitual que las verificaciones de resistencia puedan expresarse mediante expresiones del tipo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi f} &\leq \boldsymbol{d r}_b \\ \boldsymbol{\psi f} - \boldsymbol{d r}_b &\leq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ejemplo típico es el de la comprobación de la resistencia a flexocompresión de una sección simétrica metálica que, de acuerdo a las directrices establecidas en los códigos europeos, se realiza con expresiones de la forma

$$\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Sd}}{M_{Rd}} \leq 1$$

Si consideramos la posibilidad de signos variados tanto en el normal (tracción o compresión) como en el momento, la expresión anterior es en realidad de la forma

$$\frac{|N|}{N_R} + \frac{|M|}{M_R} \leq 1$$

en la que se dejan implícitos los subíndices eliminados al no inducir a confusión, y donde tanto N_R como M_R son positivos.

La anterior ecuación puede expresarse como

$$\begin{aligned} |N|M_R + |M|N_R &\leq N_R M_R \\ |N|m_R + |M|n_R &\leq N_R m_R \end{aligned}$$

usando $n_R = N_R/(\sqrt{N_R^2 + M_R^2})$, $m_R = M_R/(\sqrt{N_R^2 + M_R^2})$.

Dicha expresión no es otra que el conjunto de las cuatro comprobaciones siguientes:

$$\begin{bmatrix} m_R & n_R \\ -m_R & n_R \\ -m_R & -n_R \\ m_R & -n_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} N_R m_R$$

que está, como se ve, en el formato apuntado, y que podría generalizarse sin dificultad al conjunto de todas las secciones de un pórtico concreto.

2.4. Compatibilidad o admisibilidad cinemática

Las condiciones de compatibilidad constituyen el segundo gran grupo de ecuaciones disponibles en el análisis estructural.

La condición establece, en suma, que los movimientos de la estructura han de ser dibujables, mateniendo la continuidad de ésta pues, si la estructura no ha roto, los desplazamientos de todas sus partes deben resultar acompasados. Las ecuaciones de compatibilidad pueden formularse de muchas formas, pero deben establecer en todo caso la continuidad geométrica de los movimientos de unas y otras partes de la estructura.

Pueden formularse en términos paralelos a las condiciones de equilibrio, a saber, que para cualquier región considerada de la estructura —que puede consistir en la estructura completa— los movimientos relativos de sus puntos o secciones deben poder deducirse de la integración o acumulación de las deformaciones de dicha región, o inversamente, las deformaciones han de poder deducirse de los desplazamientos relativos de los puntos o secciones de la región.

Para formular dichas condiciones se establecen por una parte los movimientos de la estructura mediante el vector $\boldsymbol{U}$ que representa los desplazamientos de sus puntos libres, y por otra las deformaciones del volumen estructural, mediante el vector $\boldsymbol{u}$, que codifica éstas. Las condiciones de compatibilidad se formulan como las ecuaciones que permiten deducir $\boldsymbol{u}$ a partir de $\boldsymbol{U}$.

En la hipótesis de pequeños desplazamientos, las relaciones entre ambas magnitudes corresponden al primer término, lineal, del posible desarrollo en serie de las funciones que las ligan, de modo que la representación de las condiciones de compatibilidad lleva a obtener un conjunto de relaciones lineales en la forma

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U} \tag{2.8}$$

Veremos que las relaciones tienen la propiedad —general— de que $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}^T$, es decir, que la matriz de equilibrio $\boldsymbol{H}$ es la traspuesta de la matriz de compatibilidad $\boldsymbol{B}$. Demostraremos dicha propiedad en forma general en el apartado 2.9

Puntos libres y puntos de sustentación

Si ordenamos los movimientos de los puntos de la estructura agrupando separadamente los libres de los de sustentación la ecuación $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$ queda en la forma

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_l & \boldsymbol{B}_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_l \\ \boldsymbol{U}_s\end{bmatrix}$$

expresión en la que al principio del análisis se conocen las $\boldsymbol{U}_s$, usualmente nulas, con lo que las ecuaciones pueden simplificarse. En los casos en que $\boldsymbol{U}_s \neq \boldsymbol{0}$ se exige habitualmente prescribir valores a dichos movimientos y considerar, por el principio de superposición, los movimientos generalizados excluyendo el efecto derivado de tales movimientos impuestos en la sustentación

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{U}_s = \boldsymbol{B}_l\boldsymbol{U}_l$$

Es usual, por tanto, considerar aisladamente las ecuaciones $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}_l\boldsymbol{U}_l$, y añadir si es el caso el efecto de los movimientos impuestos posteriormente.

2.5. Condiciones de rigidez

Al igual que para el caso de los esfuerzos, es usual establecer límites a los movimientos $\boldsymbol{U}$ de la estructura mediante condiciones que, en su formato más simple, serían de la forma $\boldsymbol{U} \leq \boldsymbol{U}_l$, estableciendo límites a todos y cada uno de los movimientos libres de la estructura. Resulta más habitual, sin embargo, establecer limitaciones sólo a grupos o a combinaciones de tales movimientos, de modo que un formato —lineal— más general para tales limitaciones resultará ser de la forma

$$\boldsymbol{\Phi U} \leq \boldsymbol{P\Upsilon} \tag{2.9}$$

en la que $\boldsymbol{\Phi}$ expresará la forma de seleccionar las combinaciones de movimientos a limitar, $\boldsymbol{\Upsilon}$ las restricciones o límites convencionales usados, y $\boldsymbol{P}$ determinará la posición a que cada una de dichas restricciones debe aplicarse.

Así como las condiciones de resistencia pueden usarse con eficacia en los enfoques del análisis en rotura, las condiciones de rigidez tienen un interesante papel en la reflexión sobre la bondad del diseño estructural desde el punto de vista del aprovechamiento o menor consumo de recursos.

2.6. Constitución material, o admisibilidad material. Relaciones de rigidez

En los apartados anteriores hemos caracterizado el estado de una región de la estructura mediante las magnitudes que expresan las solicitaciones —o los esfuerzos internos de la estructura— y las que expresan sus deformaciones internas. Hemos visto, por ejemplo que el estado de una región puntual puede describirse mediante la pareja de magnitudes $\boldsymbol{f} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ y $\boldsymbol{u} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$; sabemos análogamente que puede expresarse el estado de una rebanada de una barra en una estructura plana con cargas en su plano mediante la pareja[17] $\boldsymbol{f} = (N, M)$, esfuerzo normal y momento flector, y $\boldsymbol{u} = (\epsilon, c)$, alargamiento unitario y curvatura.

Ahora bien, puede establecerse experimentalmente una relación entre los esfuerzos y las deformaciones. La más sencilla de dichas relaciones es la ley de Hooke, que hace proporcionales los alargamientos a los esfuerzos de extensión, mediante la conocida fórmula de *ut tensio sic vis*, o en su actual formulación, más precisa, de $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$. Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones en las primeras fases de la deformación mantienen la proporcionalidad, de modo que pueden representarse mediante ecuaciones lineales. El formato más generalizado de las ecuaciones que expresan esta relación para cada material considerado —ecuaciones de constitución del material, o ecuaciones constitutivas— es

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{ku} \tag{2.10}$$

Podemos presentar varios ejemplos clásicos para dicha ecuación, ejemplos que veremos más en detalle en el capítulo 3.

[17] Considerando el cortante T como un esfuerzo deducible por equilibrio a partir de la ley de momentos a lo largo de la barra.

- Punto elástico:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{bmatrix} = \frac{E}{\dfrac{(1+\nu)}{(1-2\nu)}}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{bmatrix}$$

- Rebanada de barra en un problema plano:

$$\begin{bmatrix}N\\ M\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}EA & 0\\ 0 & EI\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon\\ c\end{bmatrix}$$

- Rebanada de barra de estructura tridimensional:

$$\begin{bmatrix}N\\ M_x\\ M_y\\ M_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}EA & 0 & 0 & 0\\ 0 & GI_T & 0 & 0\\ 0 & 0 & EI_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & EI_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon\\ \eta_T\\ c_y\\ c_z\end{bmatrix}$$

Las expresiones anteriores son del mismo tipo cuando se consideran agregados de mayor importancia, como es el caso de las barras aisladas, sometidas a solicitaciones en sus extremos, y considerando los movimientos relativos entre dichos extremos. Las relaciones de rigidez en dichos *agregados* se representan mediante las expresiones empleadas en el cálculo matricial de estructuras de barras[18]:

- Barra recta sometida a tracción axial:

$$\begin{bmatrix}N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{EA}{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\end{bmatrix}$$

- Barra recta sometida a flexión plana:

$$\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix} = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}$$

- Barra recta sometida a flexocompresión plana[19]:

$$\begin{bmatrix}N\\ M_1\\ M_2\end{bmatrix} = \frac{E}{l}\begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & 4I & 2I\\ 0 & 2I & 4I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}$$

[18] Cambiar de expresiones continuas a expresiones referidas a puntos aislados es una operación de agregación realizada con mucha frecuencia, cuya generalización está en la base del método de análisis de los elementos finitos, y que consideraremos al tratar dicho método. En el capítulo 3 construiremos la matriz de rigidez de una barra con dichas técnicas.

[19] Si se observa en la expresión adoptada que la inercia I puede expresarse en función del área de la sección A y su radio de giro i, la expresión matricial clásica también podría escribirse en la forma siguiente, que tiene la ventaja de ser dimensionalmente consistente, lo que en determinados problemas puede aportar una visión más intuitiva de las relaciones implicadas, y la ventaja añadida de ser idéntica para barras distintas —salvo en el factor EA/l— lo que permite simplificar operaciones realizadas a mano con calculadoras matriciales:

$$\begin{bmatrix}N\\ M_1/i\\ M_2/i\end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \theta_1 i\\ \theta_2 i\end{bmatrix}$$

Los ejemplos pueden continuar en buen número. Hay que señalar aquí que en las ecuaciones anteriores se observan casos en que los diferentes grupos de variables son independientes —por ejemplo, en el caso de las anteriores expresiones de barras, la relación entre esfuerzos normales y alargamientos está desligada de las relaciones entre los momentos y los giros de extremo— mientras que otras están acopladas —las relaciones entre los momentos de extremos y los giros en los dos extremos de una barra— lo que puede observarse con facilidad en la formulación matricial, si el orden de variables hace contiguas las variables ligadas[20]:

$$\begin{bmatrix} N \\ \cdots \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} A & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 4I & 2I \\ 0 & \vdots & 2I & 4I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \cdots \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Si consideramos que en una estructura los movimientos de extremo de barra son los únicos requeridos para dar cuenta de los esfuerzos de extremo de ésta, resulta que la relación generalizada entre esfuerzos y movimientos, considerando todas las barras, puede establecerse de la misma manera desacoplada, de modo que la expresión $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}$ puede definirse con facilidad para el conjunto de todas las barras de la estructura apilando las relaciones correspondientes a cada una de dichas barras en torno a la diagonal principal, incluyendo todas las barras de la estructura. Obsérvese que la ordenación adoptada describirá, barra a barra, cada uno de los movimientos individualizados —y los correlativos esfuerzos de extremo—

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{k}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$

El conjunto de relaciones entre esfuerzos y deformaciones para todas las regiones de la estructura, en general en la forma $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}$, constituye el tercer grupo de ecuaciones o relaciones disponibles en el análisis elástico, que son las ecuaciones de rigidez. Se dice que la estructura posee un estado materialmente admisible si los esfuerzos y deformaciones correspondientes a dicho estado satisfacen dichas ecuaciones, también denominadas ecuaciones de constitución, o *constitutivas* para el caso del punto material.

2.7. Trabajo y energía

Hemos definido en apartados anteriores los conceptos básicos en la formulación de los problemas del análisis estructural, a saber, fuerzas y solicitaciones

[20] Un ejercicio interesante a este respecto es *diagonalizar* las relaciones descritas por una matriz no diagonal: en el caso de la matriz de rigidez de una barra dicho ejercicio lleva a la descomposición del movimiento de flexión en dos partes no acopladas, a saber, la parte simétrica más la antimétrica, resultando

$$\begin{bmatrix} N \\ M_s \\ M_h \end{bmatrix} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 2I & 0 \\ 0 & 0 & 6I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta_s \\ \theta_h \end{bmatrix}$$

$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{f})$, movimientos y deformaciones$(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{u})$, y sus relaciones respectivas de admisibilidad, estática $(\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f})$, cinemática $(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U})$, y material $(\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{u})$. Considerábamos como términos que representan el comportamiento de la estructura las fuerzas externas y los movimientos de puntos representativos de ésta, mientras que representábamos el comportamiento de regiones reducidas de la estructura —puntos, rebanadas, o barras sencillas— mediante los conceptos de solicitación y deformación. Tenemos, por tanto, dos perspectivas con la que considerar la estructura: globalmente como conjunto, o en sus partes o componentes, y a su vez dos grupos de variables para expresar su comportamiento, mecánico uno —fuerzas ... — y cinemático el otro.

A lo largo de dichos apartados hemos hecha reiteradamente alusión a un principio ordenador permanente: el trabajo. Cada pareja de grupos de variables considerada se ordena de modo que el producto escalar del vector que representa las variables macánicas por el que representa las variables cinemáticas ya sea desde la perspectiva global, ya desde la local, representa trabajo mecánico.

Desde la perspectiva del análisis estructural dicho trabajo puede emplearse como medio alternativo al estudio del equilibrio y la compatibilidad, tal como veremos en la sección siguiente, mediante el principio denominado de los trabajos virtuales. Se trata de la forma más extendida de empleo del concepto, siendo de aplicación general en medios continuos o discretos, en comportamiento lineal o no lineal, ...

Los conceptos de trabajo y energía se emplean asimismo en aproximaciones *energéticas* a determinados problemas, tanto en los casos elásticos, conservativos —aunque no necesariamente lineales— a través de los conceptos de energía potencial y energía potencial de deformación, como en los casos plásticos, disipativos, a través de los conceptos de energía o potencia disipada plásticamente.

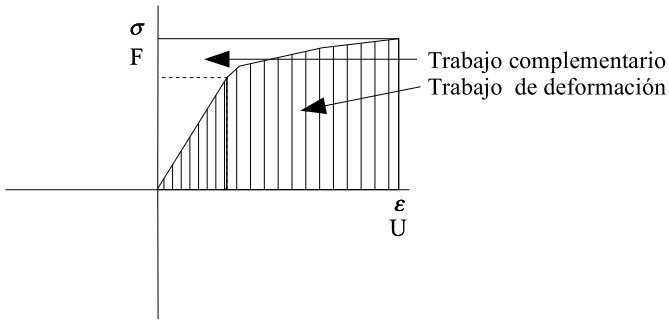


Figura 2.5: Trabajo

En la figura se representan gráficamente las regiones correspondientes a los productos de fuerzas–desplazamientos, o esfuerzos–deformación que pueden asociarse con los distintos términos, tanto en los casos conservativos, como en los disipativos.

2.8. Principio de superposición

En la medida en que se considere un comportamiento no disipativo de la estructura y sus materiales constituyentes, resultará que el estado alcanzado tras un proceso de carga no dependerá del proceso mismo, sino sólo de la configuración final de las cargas aplicadas a la estructura. Esto es así en los modelos elásticos lineales, por razones obvias, pues un modelo lineal puede siempre descomponerse en sumas, que pueden agruparse como modelos separados y reordenarse, dada la conmutatividad de la suma, pero es cierto igualmente por razones termodinámicas en cualesquiera otras situaciones que no admitan la disipación de energía. Por ello en tales casos puede considerarse para el análisis de un cierto estado su descomposición en estados separados más simples, obteniendo el estado complejo mediante la superposición de aquellos.

2.9. Principio de los trabajos virtuales

El principio de los trabajos virtuales ha tenido históricamente dos formulaciones alternativas, de los desplazamientos virtuales, o de las fuerzas virtuales. Sin embargo su denominación como *trabajos virtuales* recoge ambas perspectivas, por lo que es el actualmente empleado.

El principio de los trabajos virtuales establece que si se consideran en una misma estructura dos estados diferentes y usualmente independientes, el primero de esfuerzos y cargas en equilibrio, $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{F})$, y el segundo de deformaciones y movimientos compatibles, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{U})$, el trabajo realizado por las fuerzas (y esfuerzos) del primer estado en los movimientos (y deformaciones) del segundo es nulo, o lo que es análogo, que el trabajo externo —cargas por desplazamientos— iguala al trabajo interno —esfuerzos por deformaciones—

Establece que dicha igualdad entre trabajo interno y externo se produce si, pero sólo si, se cumplen las condiciones de equilibrio y de compatibilidad de los estados considerados, sin necesidad en todo caso de que se traten de estados reales o virtuales de la estructura, si es que tales calificativos pueden tener algún tipo de sentido: los estados considerados no tienen por qué tener relación alguna entre sí; sólo debe ser equilibrado el estado mecánico, y compatible el cinemático.

La primera demostración del principio, debida a John Bernouilli[21] es muy sencilla: si consideramos un sistema de puntos materiales sometidos a fuerzas mutuas, y en equilibrio, y lo deformamos desplazando arbitrariamente unos respecto de otros, el trabajo total producido en esa deformación es nulo, puesto que al tratarse de fuerzas equilibradas aportan resultante nula en cada punto, resultante que por tanto produce trabajo nulo. Si en ese sistema de puntos aislamos una región —interna, considerando internas las fuerzas mutuas entre los puntos de dicha región— que estará en equilibrio con el resto de fuerzas —externas— y la deformamos, debido al anterior razonamiento, el trabajo total debe ser nulo, y por lo tanto el trabajo desarrollado por las fuerzas externas debe ser igual y contrario al desarrollado por las fuerzas internas. Si consideramos ahora un sistema en el que la afirmación anterior es cierta —el trabajo es nulo para cualquier deformación arbitraria que supongamos— el sistema debe estar en equilibrio, pues basta suponer que la deformación es sucesivamente el movimiento aislado

[21] En carta a Varignon de 1717 y que éste cita en [Varignon, 1725]

de cada punto, que, por desarrollar trabajo nulo, debe estar sometido a fuerzas de resultante nula, y por ende, en equilibrio.

La anterior *demostración* puede ser contestada en el ámbito de los medios continuos, en el que no cabe identificar puntos materiales en número finito, y en el que, por tanto, el razonamiento no sería aplicable al no poder recorrerse en tiempo finito un conjunto innumerable.

Vamos a deducir por tanto el principio en la forma infinitesimal clásica empleada en los textos de elasticidad, a partir de un estado equilibrado en el continuo de la estructura, al que sometemos a un movimiento arbitrario, a lo largo del que suponemos se mantiene el estado equilibrado original.

Se denomina principio, pues tanto podemos deducir éste a partir de las condiciones de equilibrio y de compatibilidad, como al revés, es decir, deducir lo que son el equilibrio o la compatibilidad a partir del cumplimiento de los enunciados de dicho principio. O dicho con más precisión, se treta de una relación triangular: equilibrio y compatibilidad permiten deducir el enunciado del principio, y la concurrencia del principio con el equilibrio —o con la compatibilidad— en uno de los estados permite deducir la compatibilidad —o el equilibrio— en el otro. En la formulación de métodos de análisis aproximado es usual esta segunda perspectiva, estableciendo las condiciones de equilibrio a través del cumplimiento de los enunciados del principio de los trabajos virtuales.

En 2.1 representábamos las tensiones y deformaciones en un punto en dos formatos clásicos: el tensorial $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}$, $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{ij}$, y en la forma apropiada para su tratamiento usando matrices de no más de dos dimensiones, usando por ello $\boldsymbol{f}^T = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$, $\boldsymbol{u}^T = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$. Frente a las anteriores, las cargas aplicadas $\boldsymbol{F}$ pueden ser cargas de masa, aplicadas de forma distribuida sobre el volumen Ω de la estructura ($\boldsymbol{F}_\Omega^T = (p_x, p_y, p_z)$), o cargas de superficie, aplicadas en su contorno Γ ($\boldsymbol{F}_\Gamma^T = (\tau_{nx}, \tau_{ny}, \tau_{nz})$).

Los desplazamientos $\boldsymbol{U}$ se representan mediante vectores asociados al punto que se desplaza: $\boldsymbol{U}^T = (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$.

En los textos clásicos de elasticidad se analiza el equilibrio del cubo elemental sometido a las tensiones en sus caras y a las cargas aplicadas al volumen obteniéndose las expresiones siguientes,

$$
\begin{aligned}
p_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\
p_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\
p_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0,
\end{aligned}
$$

fáciles de verificar observando el cubo infinitesimal de lado unidad.

Si desplazamos ese cubo unidad en cada punto de la estructura mediante un movimiento generalizado $\boldsymbol{U}$ —movimiento arbitrario pero compatible y del que puede obtenerse una deformación compatible por diferencia entre movimientos de puntos próximos— el trabajo realizado por todo el conjunto de fuerzas es nulo, al serlo en cada cubo elemental: el trabajo en cada dirección y para cada elemento de volumen no es más que el producto del primer término de la ecuación por el desplazamiento correspondiente, por el elemento de volumen, que, por igualdad con el segundo término, resulta nulo:

$$\int_\Omega u_x p_x\,dv + \int_\Omega u_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,dv + \int_\Omega u_x \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,dv + \int_\Omega u_x \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,dv +$$
$$\int_\Omega u_y p_y\,dv + \int_\Omega u_y \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\,dv + \int_\Omega u_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\,dv + \int_\Omega u_y \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\,dv +$$
$$\int_\Omega u_z p_z\,dv + \int_\Omega u_z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\,dv + \int_\Omega u_z \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\,dv + \int_\Omega u_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\,dv = 0.$$

Si en la ecuación anterior usamos la notación ya establecida para $\boldsymbol{F}_\Omega^T$ y si, en segundo lugar, integramos por partes los términos que contienen derivadas parciales —realizamos la integral de Green–Gauss— resulta

$$\int_\Omega \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{F}_\Omega\,dv + \int_\Gamma u_x \sigma_{nx}\,dS + \int_\Gamma u_y \sigma_{ny}\,dS + \int_\Gamma u_z \sigma_{nz}\,dS +$$
$$- \int_\Omega \frac{\partial u_x}{\partial x}\sigma_x\,dv - \int_\Omega \frac{\partial u_x}{\partial y}\tau_{yx}\,dv - \int_\Omega \frac{\partial u_x}{\partial z}\tau_{zx}\,dv +$$
$$- \int_\Omega \frac{\partial u_y}{\partial x}\tau_{xy}\,dv - \int_\Omega \frac{\partial u_y}{\partial y}\sigma_y\,dv - \int_\Omega \frac{\partial u_y}{\partial z}\tau_{zy}\,dv +$$
$$- \int_\Omega \frac{\partial u_z}{\partial x}\tau_{xz}\,dv - \int_\Omega \frac{\partial u_z}{\partial y}\tau_{yz}\,dv - \int_\Omega \frac{\partial u_z}{\partial z}\sigma_z\,dv = 0.$$

Puede observarse que el primer término de volumen es el trabajo realizado por las fuerzas de masa, y que los términos de superficie son iguales al trabajo realizado por las fuerzas de superficie en el desplazamiento. Ambos grupos de términos suman el trabajo externo ejercido por las fuerzas aplicadas a la estructura:

$$W_e = \int_\Omega \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{F}_\Omega\,dv + \int_\Gamma \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{F}_\Gamma\,dS. \tag{2.11}$$

Por otro lado los términos negativos, que son términos de volumen, contienen derivadas parciales de los movimientos, que no son otra cosa que las deformaciones que se derivan del campo de movimientos prescritos, es decir, las deformaciones compatibles con el movimiento prescrito:

$$\frac{\partial u_i}{\partial i} = \epsilon_i,\ i \in (x,y,z); \quad \frac{\partial u_i}{\partial j} = b_{ij},\ i,j \in (x,y,z);$$

por lo que los términos negativos expresan, en negativo, el trabajo interno de deformación de la estructura

$$W_i = \int_\Omega \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f}\,dv \tag{2.12}$$

resultando que el sistema inicial en equilibrio $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{F})$, sometido al desplazamiento compatible $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{U})$ desarrolla trabajo nulo :

$$W_e - W_i = \int_\Omega \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{F}_\Omega\,dv + \int_\Gamma \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{F}_\Gamma\,dS - \int_\Omega \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f}\,dv = 0. \tag{2.13}$$

Una manera alternativa clásica de abordar la demostración es partir de un análisis de la energía movilizada en la masa de la estructura a partir de un movimiento generalizado compatible $\delta \boldsymbol{U}^T = (\delta \upsilon_x, \delta \upsilon_y, \delta \upsilon_z)$. Si en este movimiento

estudiamos el trabajo desarrollado por las fuerzas de masa $\boldsymbol{F}_\Omega^T = (p_x, p_y, p_z)$ tendremos la medida

$$\delta W_m = \int_\Omega \delta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{F}_\Omega \, dv \tag{2.14}$$

Si tomamos el segundo término y lo igualamos a su integral por partes realizada en la forma ya conocida, usando las ecuaciones de equilibrio para relacionar $\boldsymbol{F}_\Omega$ y $\boldsymbol{\sigma}$ —sus derivadas— así como las ecuaciones de compatibilidad para relacionar $\delta \boldsymbol{U}$ —sus derivadas— con $\delta \boldsymbol{\epsilon}$, tendremos que en dicha integración aparece el término de contorno (en Γ) definiendo el trabajo de las fuerzas exteriores, más los términos en el interior del cuerpo (en Ω) definiendo el trabajo de deformación. Los términos de contorno pueden pasarse al primer miembro de la igualdad, resultando así la identidad entre el trabajo de las fuerzas exteriores —de masa y de contorno— en el desplazamiento con el trabajo de los esfuerzos interiores en la deformación. Nótese que en esta demostración el recurso al símbolo δ es meramente notacional, para distinguir el campo de desplazamientos–deformaciones usado, aun cuando en la literatura es habitual hablar de desplazamientos *pequeños* si, como es usual, se los considera *parte* de los reales de la estructura. Se habla en esa literatura de principio de los *desplazamientos virtuales*. Pero nada en la demostración requiere que haya relación alguna entre dicho campo y el de cargas–esfuerzos: sólo se emplean las ecuaciones de compatibilidad en el primero y las de equilibrio en el segundo, para la misma geometría. Podríamos haber usado el símbolo δ para denotar el campo equilibrado y estaríamos hablando del principio de las *fuerzas virtuales*. Se trata obviamente de dos formas de ver un único principio, hoy conocido como de los *trabajos virtuales*. Es sustancial en el razonamiento que tanto el equilibrio como la compatibilidad puedan expresarse en sus respectivos campos en la forma diferencial apuntada, como que la geometría de referencia para ambos campos sea idéntica. Pero no se ha empleado requisito alguno de admisibilidad material, dado que no se exige ningún tipo de ligadura entre ambos campos. Puede verse además, repasando los razonamientos utilizados, que la *demostración* no emplea más que el recurso a lo que puede verse como un cambio de sistema de referencia —aunque complejo— para medir desde dos perspectivas distintas una magnitud concreta preelegida.

De los razonamientos anteriores se deduce efectivamente que trabajo externo o trabajo interno no son más que dos modos alternativos de caracterizar el trabajo desarrollado por las fuerzas equilibradas de la estructura en el desplazamiento compatible, y que, por tanto, si se respeta el equilibrio de fuerzas y solicitaciones y la compatibilidad de movimientos y deformaciones, lo que se hace al pasar de una perspectiva a la otra es sólo un cambio legítimo de referencia, por lo que ambos trabajos externo e interno son idénticos, y su diferencia nula.

Si observamos el mismo asunto desde la perspectiva energética, y consideramos por ejemplo, como sistema compatible, un campo de desplazamientos en el que las cargas pierden energía potencial, resultará que el trabajo interno de la estructura corresponderá a una ganancia de energía potencial elástica. De este modo el trabajo realizado, nulo, es la suma de una pérdida de energía y de una ganancia de energía simultáneas, y la variación en el conjunto de la energía potencial, igual y contraria al trabajo realizado, resulta igualmente nula:

$$\Delta U_e + \Delta U_i = -(W_e - W_i) = 0. \tag{2.15}$$

En esta última interpretación no debemos olvidar la independencia postulada entre ambos campos de fuerzas–esfuerzos y movimientos–deformaciones, y su

identidad a lo largo del *movimiento*, lo que hace algo *sui géneris* el concepto de energía potencial elástica acumulado, que habitualmente se refiere a la adquirida en estados de deformación alcanzados en procesos de carga que crece lentamente y manteniendo en todo momento la admisibilidad material, de la que aquí no se habla.

Si consideramos ahora el estado de una estructura sometida a cargas, a las que equilibra, y deformada en virtud de éstas, y consideramos pequeños movimientos en torno a dicho estado, como la anterior condición se produce para cualquier movimiento arbitrario que quepa concebir, resulta de ello que si se considera la energía potencial total del sistema cargas–estructura deformada, y se define como función de la deformación, la energía potencial total está en un punto crítico —máximo o mínimo— o lo que es lo mismo, el estado de equilibrio alcanzado por la estructura debe corresponder a un punto estacionario de la energía potencial total. Desde la perspectiva termodinámica, y en virtud del segundo principio, la energía útil –o exergía— es mínima en el equilibrio y, en las estructuras entendidas como sistemas aislados, esta energía útil es la energía potencial total que, por tanto, debe ser mínima.

En general el principio se aplicará considerando dos estados independientes, uno equilibrado (f, F) y otro compatible (u, U), y estableciendo la identidad entre el trabajo realizado por las variables internas —trabajo interno— con el realizado por las variables externas —trabajo externo—, expresión que, para el caso en que dichas variables sean discretas, tendrá la sencilla forma siguiente:

$$\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{F} \tag{2.16}$$

2.9.1. Dualidad mecánico–cinemática

Acabamos de ver que el producto en una estructura dada de todo movimiento compatible por todo estado de cargas equilibrado debe producir igual trabajo interno que externo.

Consideremos ahora dos estados de una estructura representados por $\bar{\boldsymbol{u}}$, $\bar{\boldsymbol{U}}$, y por $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{F}$. Sea el primero un estado compatible, y el segundo uno equilibrado. Pueden, por lo tanto escribirse las relaciones 2.6, 2.8 y 2.16 particularizadas para dichos estados, a saber

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{f} \\ \bar{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{U}} \\ \bar{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{f} &= \bar{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{F}. \end{aligned}$$

Si en la tercera de las ecuaciones sustituimos las dos precedentes, resulta

$$\bar{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{f} = \bar{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}.$$

Nótese que, como esta igualdad debe darse en todo caso, para cualesquiera $\bar{\boldsymbol{U}}$, $\boldsymbol{f}$, debe resultar que

$$\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{H}. \tag{2.17}$$

Esta propiedad resulta extremadamente útil, pues bastará en cada problema considerar la formulación que resulte más cómoda, la del equilibrio, o la de la compatibilidad, obteniendo la correspondiente dual de forma puramente automática. Dado que en el análisis de la respuesta estructural frente a un sistema

de cargas dado ha de reflexionarse sobre el estado de deformación que es capaz de poner en juego esfuerzos que equilibren las cargas, desde mi particular punto de vista suelo encontrar más sencillo formular la compatibilidad aunque hay, evidentemente, partidarios del enfoque opuesto. En todo caso, al establecer el modelo con el que se trata de representar una estructura, una razonable estrategia de comprobación del modelo, una especie de prueba del nueve de la idoneidad del modelo, consiste en representar por separado las dos condiciones, y verificar después que se da la igualdad 2.17.

2.10. Análisis lineal y no lineal. Primer orden. Segundo orden, ...

Hemos visto en la exploración de las magnitudes que forman parte de la descripción del problema estructural que, por un lado, tenemos magnitudes que podríamos denominar *externas*, como son las $\boldsymbol{F}$ y las $\boldsymbol{U}$, cargas y desplazamientos, y por el otro tenemos las que podríamos denominar *internas*, que son las de las $\boldsymbol{f}$ y las $\boldsymbol{u}$, esfuerzos y deformaciones. Respecto de las primeras sabemos que en algunos puntos *libres* conocemos las cargas pero desconocemos los desplazamientos, mientras que en el resto de los puntos *de sustentación*, desconocemos las cargas, que ahora son las reacciones, mientras que conocemos los desplazamientos, al estar coaccionados. Sea D el número de términos de cualquiera de las dos magnitudes $\boldsymbol{F}$ o $\boldsymbol{U}$: conocemos D en total, y desconocemos otras tantas.

Hemos visto también que siempre podemos reducir el problema eliminando de las ecuaciones los términos correspondientes a la sustentación, por lo que es usual considerar sólo los puntos libres. En todo caso consideraremos que D expresa el número de incógnitas consideradas.

En relación con las magnitudes $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{u}$, antes del análisis desconocemos tanto unas como otras. Sea d el número de términos de cualquiera de estas últimas magnitudes. Vemos que tenemos incógnitas en un número acumulado de $D+2d$.

Por otro lado, al considerar las relaciones entre magnitudes hemos visto que podemos establecer las D ecuaciones de equilibrio $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}$.

En el caso de que $D = d$ tenemos con las ecuaciones de equilibrio tantas ecuaciones como incógnitas: el número de términos en los *datos* $\boldsymbol{F}$ coindide con el número de las *incógnitas* $\boldsymbol{f}$ y el problema es isostático y por lo tanto puede resolverse sin necesidad de recurrir a condiciones de deformación: las cargas determinan los esfuerzos, éstos determinan las deformaciones, y de éstas pueden deducirse los desplazamientos empleando el resto de las ecuaciones obtenidas en apartados anteriores.

En el caso de de que $D > d$, tenemos más ecuaciones que incógnitas. Es imposible por tanto obtener soluciones salvo para condiciones particulares de la carga, por lo que existen casos de carga para las que no hay equilibrio. El sistema es un mecanismo. Se trata de un sistema hipostático. Podríamos decir que no hay posibilidades de deformación[22] para algunas de las direcciones de la carga. Esto puede verse con mayor claridad si se observa que la ecuación dual, de compatibilidad $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$, o lo que es lo mismo, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{U}$ es un sistema de d ecuaciones que ligan los d modos de deformación con los D desplazamien-

[22] Debe entenderse aquí el término deformación en su sentido pleno de respuesta estructural, respuesta que se materializa por acumulación interna de energía de deformación.

tos. Al ser mayor el número de desplazamientos libres, resulta posible conseguir combinaciones no nulas de éstos para los que las deformaciones son nulas, y por lo tanto no existe respuesta estructural capaz de oponerse a dicho desplazamiento. Dichas combinaciones corresponden a los modos de desplazamiento del mecanismo.

En el caso de de que $D < d$, tenemos menos ecuaciones que incógnitas. Esto signifca que el equilibrio para cualquier condición de carga es siempre posible, pero además, que pueden darse muchas soluciones alternativas a las condiciones de equilibrio, para distintas combinaciones de esfuerzo. El problemas es hiperéstático, y no queda suficientemente determinado con sólo las ecuaciones de equilibrio.

En este caso bastará considerar los tres grupos de condiciones, es decir, las de admisibilidad estática, cinemática, y material, que aportan cada una de ellas un número de D, d y d ecuaciones respectivamente, suficientes para determinar las $D + 2d$ incógnitas del problema.

De este modo, en general, las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y de constitución material son las ecuaciones necesarias y suficientes para resolver de forma completa cualquier problema estructural, si bien, en los casos isostáticos, bastaría con las primeras para determinar los esfuerzos sin necesidad de recurrir a consideraciones cinemáticas o de constitución material, que sí se precisan si se desea determinar deformaciones y movimientos. En el caso general de que la estructura sea hiperestática es necesario considerar conjuntamente la totalidad de los aspectos del problema para obtener solución a cualquiera de ellos.

2.10.1. Análisis lineal y no lineal

Hemos obtenido las relaciones de equilibrio: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}$; de compatibilidad: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$; y de constitución: $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}$. Cuando son relaciones lineales —pequeños movimientos, material proporcional— se trata de expresiones de multiplicación de matrices, en las que las matrices $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}^T$ y $\boldsymbol{k}$ son matrices de coeficientes numéricos cuya determinación es posible si es conocida la estructura.

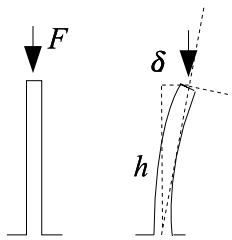


Figura 2.6: No linealidad geométrica

En el caso de que los movimientos no sean despreciables en la descripción del comportamiento de la estructura, es fácil ver que las matrices $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}^T$ son realmente matrices de funciones que dependen de la posición de la estructura, como queda ilustrado con el ejemplo del pilar esbelto: empleando el criterio de representar los esfuerzos de extremo de barras en ejes alineados con la recta que liga sus dos extremos, resulta que la ecuación de equilibrio depende del

desplazamiento en cabeza:

$$F = N \cos \frac{\delta}{h} + T \sin \frac{\delta}{h}$$

La expresión es dependiente de los desplazamientos. Problemas de estabilidad de este tipo, o los denominados *de grandes desplazamientos*, responden a situaciones en los que el análisis del equilibrio debe realizarse en la situación deformada, y resultan en ellos relaciones no lineales entre las variables, incluso aunque los materiales presenten comportamiento perfectamente lineal en todas las fases de la deformación. Se trata de problemas con *no linealidad geométrica*, en los que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{f}$, donde puede verificarse la no linealidad en los productos de variables procedentes de $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{f})$ y $\boldsymbol{f}$. Problemas clásicos de este tipo son los de inestabilidad, o pandeo, los del comportamiento de los cables, o de estructuras atirantadas esbeltas, etc.

En este tipo de problemas puede considerarse que el comportamiento representado por las ecuaciones puede describirse con grados crecientes de aproximación si imaginamos desarrolladas en series polinómicas las expresiones matemáticas que las representan. Pues en efecto, si se expresan todas las ecuaciones en términos de los movimientos —pequeños—, resultan expresiones con términos lineales —primer orden— cuadráticos —segundo orden— y sucesivos ..., términos en los que el orden mayor implica menor influencia en el comportamiento observado. Es relativamente usual denominar análisis de *segundo orden* al empleado para obtener la primera aproximación no lineal en problemas de no linealidad geométrica, mientras que el análisis de *primer orden* sería el análisis puramente lineal.

De manera totalmente independiente puede resultar que, aun cuando los movimientos sean despreciables y por tanto lineales las relaciones geométricas —entre fuerzas y esfuerzos, o entre deformaciones y movimientos— no lo sean sin embargo las relaciones entre esfuerzos y deformaciones por depender del estado de la deformación: si el material no es elástico, su rigidez varía con la deformación, de modo que las ecuaciones de constitución material resultan de la forma $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u})$, nuevamente no lineal. Se trata de problemas de *no linealidad material*. Son problemas clásicos de este tipo todos los que tratan de aprovechar las fases últimas del comportamiento de los materiales, tanto en los dúctiles —aprovechando la plastificación en el acero y en las secciones suficiente armadas en hormigón armado— como en los frágiles —asumiendo la aparición controlada de fisuras en hormigones o fábricas—, etc...

Por supuesto que pueden combinarse ambos orígenes, como podría ejemplificar una estructura de cables realizada con materiales compuestos, de comportamiento altamente no lineal.

Análisis límite o análisis último

En el extremo opuesto al análisis elástico[23] se sitúan los análisis en rotura o análisis límite. En este caso, y a fin de obtener aproximaciones relativamente sencillas al comportamiento último, suele adoptarse la simplificación de suponer horizontal la rama de la gráfica que relaciona la tensión con la deformación, o

[23] Si consideramos el aspecto de la gráfica tensión deformación típica de un material dúctil cualquiera, el origen de la gráfica corresponde al inicio de la fase elástica, mientras que la rama final de la gráfica, el extremo opuesto, esquematiza la condición de rotura.

lo que es lo mismo, suponer posibles deformaciones sin cambio de tensión[24]. En este caso se habla de —inicio del— movimiento de colapso, de modo que las ecuaciones que hemos considerado deben reescribirse para dicha situación.

En tal situación, el modelo de pensamiento aplicado supone que las deformaciones elásticas ya se han producido, y no se alteran en el proceso de inicio del colapso, por lo que el movimiento de las regiones con comportamiento puramente elástico puede asimilarse a un movimiento sin deformación. Se analiza por tanto exclusivamente el comportamiento de las regiones que plastifican, y los esfuerzos y movimientos asociados a dicha plastificación.

Las ecuaciones de equilibrio deben matenerse, dado que se analiza el equilibrio que precede al colapso, por lo que no tienen dificultad alguna, si bien se representan sólo las pertinentes en este análisis, es decir, las asociadas a las regiones que plastifican, consideradas como sólidos indeformables que se conectan entre sí mediante los esfuerzos de plastificación. Los modelos serán *estáticamente admisibles* si respetan el equilibrio.

Las ecuaciones de compatibilidad serán ahora ecuaciones que ligan los movimientos generales de la estructura con las deformaciones plásticas de las regiones apropiadas. Los modelos serán *cinemáticamente admisibles* si corresponden a geometrías de colapso posibles, que respeten la conectividad de la estructura. Es usual ahora considerar como geometría del colapso la que representa los cambios entre posiciones sucesivas de la estructura en el proceso de inicio de colapso, hablándose, por tanto, de *velocidad* de deformación, o de desplazamiento.

Las ecuaciones de constitución material —las de rigidez en el caso del análisis elástico— deben representar ahora la condición de plastificación, es decir, la postulación de deformación plástica si, y sólo si, los esfuerzos se corresponden con los que dan origen a la plastificación para los materiales y secciones empleados. La *admisibilidad material* se dará si plastificaciones y esfuerzos se corresponden entre sí de acuerdo con las cualidades materiales empleadas: es decir, si no hay plastificaciones en secciones con menor esfuerzo de los de rotura, ni hay esfuerzos mayores a los de rotura en ninguna sección de la estructura.

Veremos más adelante que, en estas condiciones, el conjunto de relaciones descritas permite, nuevamente, formular los problemas de forma completa y obteniéndose soluciones únicas sólo si se respetan el conjunto de las tres condiciones de admisibilidad reseñadas.

2.11. La solución elástica del problema estructural

Hasta aquí hemos visto que podemos construir para todo modelo estructural

- las condiciones de equilibrio o admisibilidad estática $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{f}$,
- las condiciones de compatibilidad o admisibilidad cinemática $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$,
- las condiciones de rigidez o admisibilidad material $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}$.

Hemos visto además que el problema queda usualmente formulado en términos de *obtener los desplazamientos* $\boldsymbol{U}$ *que corresponden a unas ciertas cargas* $\boldsymbol{F}$*, y para las condiciones en que se cumplen las tres condiciones de admisibilidad.* En

[24] Veremos en el capítulo 5 una descripción más precisa de este tipo de situaciones.

efecto, conocidos los desplazamientos generales, la ecuación de compatibilidad permite obtener las deformaciones, y la de rigidez los esfuerzos, de modo que el estado completo de la estructura queda determinado.

En general habremos construido un modelo en el que tanto $\boldsymbol{U}$ como $\boldsymbol{F}$ representan valores en los puntos libres de la estructura, aunque puede haber casos en que sea de mayor comodidad incluir tanto los puntos libres como los de la sustentación, caso que consideraremos posteriormente.

Puesto que el estado buscado es equilibrado y compatible debe cumplirse el principio de los trabajos virtuales, tanto considerando desplazamientos compatibles respecto de la situación buscada, como considerando variaciones tensionales equilibradas. Supondremos, por tanto que $\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{U}}$ representa uno de dichos estados elegido arbitrariamente. Planteando la equivalencia de trabajo interno y externo, y sustituyendo

$$\bar{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{f} = \bar{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{F}$$
$$\bar{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{k} \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{F}$$
$$\bar{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{k} \boldsymbol{B} \boldsymbol{U} = \bar{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{F}.$$

La última expresión debe ser cierta para cualquier $\bar{\boldsymbol{U}}$ arbitrario, por lo que resulta de inmediato que

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} \quad \text{siendo } \boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{k} \boldsymbol{B}. \tag{2.18}$$

De este modo puede construirse la matriz $\boldsymbol{K}$ que expresa las relaciones entre las cargas y los desplazamientos de la estructura constituyendo un sistema de ecuaciones cuya solución determina los movimientos $\boldsymbol{U}$.

2.11.1. Sustentaciones

En el caso en que el modelo construido incluya los puntos de sustentación, resultaría que para movimientos rígidos del modelo no habría deformación. La matriz sería singular, siendo el trabajo interno nulo, e igualmente el externo, al ser iguales y contrarios los trabajos desarrollados por cargas y reacciones en dicho movimiento, por lo que el sistema no puede ser resuelto planteado de esta manera.

En ese caso, y tal como se ha planteado en el apartado sobre acciones y reacciones, bastará ordenar los parámetros de $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{F}$ agrupando separadamente movimientos libres y sustentaciones, de modo que pueda expresarse la ecuación que los liga en la forma

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_l \\ \boldsymbol{F}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ll} & \boldsymbol{K}_{ls} \\ \boldsymbol{K}_{sl} & \boldsymbol{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_l \\ \boldsymbol{U}_s \end{bmatrix}$$

De este modo pueden obtenerse separadamente los dos sistemas de ecuaciones

$$\boldsymbol{F}_l - \boldsymbol{K}_{ls}\boldsymbol{U}_s = \boldsymbol{K}_{ll}\boldsymbol{U}_l$$
$$\boldsymbol{F}_s = \boldsymbol{K}_{sl}\boldsymbol{U}_l + \boldsymbol{K}_{ss}\boldsymbol{U}_s.$$

En el primero de ellos, los movimientos de la sustentación, usualmente nulos, estarán prescritos pudiendo ser considerados como cargas equivalentes en caso de no serlo, de acuerdo a la expresión. El segundo permitiría determinar las reacciones una vez resuelto el primero en la forma habitual.

2.11.2. Subestructuras: condensación estática

Un caso próximo aunque inverso al anterior, en el que hemos eliminado del problema los puntos de la sustentación, lo constituye el problema de las subestructuras. Las subestructuras serían regiones amplias de la estructura que se aíslan para el análisis de aquélla. En este caso existe un conjunto de puntos, *internos* a la subestructura, que no tienen contacto con el resto de la estructura, mientras que otro conjunto corresponderá a las *conexiones* con el conjunto estructural restante.

Ahora bien, el resto de la estructura no ejerce acción directa ninguna sobre los puntos internos. Para éstos podemos imaginar que el habitual proceso de carga desdoblado en dos fases a saber, una primera fase de empotramiento perfecto sin desplazamientos, para las cargas aplicadas a la subestructura, y una segunda fase de desplazamiento sin carga, se resuelve ahora en tres fases, dos internas y una conjunta de la estructura, que serán, sucesivamente:

- empotramiento perfecto sin desplazamientos de las barras o regiones internas de la subestructura,
- desplazamiento de los puntos internos de la subestructura sin desplazamiento de los puntos de conexión, para las cargas que anulan las reacciones de empotramiento perfecto del análisis anterior, y
- desplazamiento generalizado de la estructura para las cargas que anulan las reacciones en los puntos de conexión.

Los dos primeros estados consisten en el análisis de la subestructura como una estructura aislada, en el que las cargas se resuelven en acciones sobre los puntos de conexión con el resto de la estructura, resultando el interior de la subestructura en equilibrio. El tercer estado analizado consiste en un estado de desplazamiento generalizado de la estructura en virtud de las acciones no equilibradas en las conexiones entre sus distintos elementos.

Podemos hacer con la subestructura la misma operación que en el anterior caso: agrupar las ecuaciones separando unos puntos de otros. Los puntos internos son los puntos libres de la subestructura, y las conexiones son las sustentaciones en el segundo análisis de la lista precedente. Para cada subestructura resultan las relaciones

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_i \\ \boldsymbol{F}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ic} \\ \boldsymbol{K}_{ci} & \boldsymbol{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_i \\ \boldsymbol{U}_c \end{bmatrix}$$

En la primera y segunda fases, cada subestructura queda sometida a las cargas internas, y resulta equilibrada por las reacciones que el resto de la estructura ejerce sobre los puntos de conexión $\boldsymbol{F}_{c2}$. El análisis de las subestructuras permite obtener dichas fuerzas. Para el análisis general a realizar en la tercera fase, las fuerzas $-\boldsymbol{F}_{c2}$ serán las cargas a aplicar procedentes de cada una de las subestructuras.

Ahora bien, en la tercera de las fases del análisis planteado, resultará que las cargas internas a considerar son nulas —han quedado equilibradas en las dos primeras fases en las que se ha descompuesto el problema en aplicación del principio de superposición— por lo que la ecuación desde la perspectiva de cada subestructura es

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ic} \\ \boldsymbol{K}_{ci} & \boldsymbol{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{i3} \\ \boldsymbol{U}_{c3} \end{bmatrix}$$

de donde —y eliminando el subíndice 3 por sencillez—

$$\boldsymbol{K}_{ii}\boldsymbol{U}_i + \boldsymbol{K}_{ic}\boldsymbol{U}_c = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{U}_i = -\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ic}\boldsymbol{U}_c$$
$$\boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{K}_{ci}\boldsymbol{U}_i + \boldsymbol{K}_{cc}\boldsymbol{U}_c$$
$$\boldsymbol{F}_c = \left(-\boldsymbol{K}_{ci}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ic} + \boldsymbol{K}_{cc}\right)\boldsymbol{U}_c$$

que constituye una expresión que relaciona esfuerzos y movimientos en los puntos de conexión, y que por lo tanto constituye una expresión completa de rigidez para la incorporación de la subestructura en la estructura completa, en la forma $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{K}_{ci}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ic} + \boldsymbol{K}_{cc}$, para los movimientos y esfuerzos de las conexiones $\boldsymbol{U}_c$, $\boldsymbol{F}_c$.

Las cargas sobre las conexiones obtenida en la segunda fase de análisis serán cargas sobre la estructura en la tercera. Obtenidos los movimientos generalizados de las conexiones $\boldsymbol{U}_c$ en la tercera fase de análisis, pueden determinarse los de los puntos internos de la subestructura $\boldsymbol{U}_i$, y por tanto pueden determinarse todos los esfuerzos internos.

2.12. Las teorías de estructuras: esquema conceptual general.

Con los conceptos que hemos visto hasta aquí podemos presentar un esquema que relaciona los conceptos generales del análisis. En efecto, el esquema siguiente es apropiado para cualquiera de las aproximaciones que abordaremos en lo sucesivo :

- Interno–externo: Cualquier modelo hace empleo de una doble perspectiva en la reflexión, la que corresponde al estudio del *comportamiento interno* de regiones limitadas de la estructura, sometida a esfuerzos $\boldsymbol{f}$ en sus contactos con el resto de la estructura —y a cargas locales en equilibrio con la ley de variación de éstos aunque usualmente se simplifica el problema considerando nulas tales cargas, que se atribuyen a la estructura— y a deformaciones $\boldsymbol{u}$ asociadas a dichos esfuerzos, y la que corresponde al *comportamiento externo* o conjunto de la estructura, representado por el de un conjunto acotado de puntos en los que se prescriben las cargas $\boldsymbol{F}_l$ (puntos libres) o los desplazamientos $\boldsymbol{U}_s$ (puntos de sustentación), y cuyos movimientos —$\boldsymbol{U}_l$, en el primer caso— y reacciones —$\boldsymbol{F}_s$ en el segundo— representan los de la estructura en su conjunto.

- Equilibrio: Se prescribe la condición de equilibrio de toda la estructura y la de cualquier región aislada de ésta, equilibrio que se expresa en general por el conjunto de ecuaciones $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}$ entre las fuerzas vistas desde la perspectiva externa o global —las cargas y reacciones— y vistas desde la perspectiva interna —los esfuerzos interno o fuerzas de extremo de los elementos que componen la estructura—.

- Compatibilidad: Se prescribe igualmente la condición de compatibilidad o de congruencia entre las deformaciones y los movimientos generales de la estructura, que se expresa por el conjunto de ecuaciones $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$. Dado el carácter dual de las formulaciones resulta ser $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}^T$.

- Constitución o rigidez material: Las propiedades de los materiales utilizados implican relaciones que deben cumplirse entre los esfuerzos internos y las deformaciones internas, relaciones que se expresan en la forma $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}$.

- Principio del trabajo virtual: Establece que el trabajo interno realizado por un sistema esfuerzos internos $\boldsymbol{f}$ en una deformación dada $\boldsymbol{u}$ es igual al trabajo externo realizado por las cargas $\boldsymbol{F}$ en el movimiento $\boldsymbol{U}$ siempre que el sistema estático $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{F}$ esté equilibrado y el sistema cinemático $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{U}$ sea compatible.

- Solución: Las anteriores ecuaciones permiten deducir el cuadro de relaciones entre cargas y desplazamientos generales de la estructura, en la forma $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{U}$. Puede observarse que dicho cuadro de relaciones resulta de obtener $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}$, o lo que es lo mismo, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}$, pudiendo resolverse los movimientos $\boldsymbol{U}$ a partir de las cargas $\boldsymbol{F}$ para cualquier condición de carga, si la matriz $\boldsymbol{K}$ puede invertirse.

- Cambio de representación: El anterior conjunto de ecuaciones $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}$ puede interpretarse sencillamente como un sistema de ecuaciones de *cambio de ejes coordenados* o un cambio de representación, que transforma la información sobre el comportamiento de la estructura entre dos sistemas alternativos, el *interno* y el *externo*.

Dicho conjunto de relaciones puede esquematizarse en el diagrama siguiente:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \boldsymbol{u} & \longleftarrow & \text{COMPATIBILIDAD}(\boldsymbol{B}) & \longleftarrow & \boldsymbol{U} & \langle\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{P}\langle & \boldsymbol{\Upsilon} \\
 & & \searrow & \updownarrow & \swarrow & & & \\
\text{MATERIAL}\downarrow & \boldsymbol{k} & \text{Trabajo interno} & = & \text{Trabajo externo} & \downarrow\boldsymbol{K} & & \\
 & & \nearrow & \updownarrow & \nwarrow & & & \\
\boldsymbol{r} \quad \rangle\boldsymbol{d},\boldsymbol{\psi}\rangle & \boldsymbol{f} & \longrightarrow & \text{EQUILIBRIO}(\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}^T) & \longrightarrow & \boldsymbol{F} & &
\end{array}
\tag{2.19}
$$

En dicho esquema se simboliza cómo puede usarse la compatibilidad y la igualdad entre trabajo interno y externo para probar el equilibrio y viceversa, el equilibrio y dicha igualdad para probar la compatibilidad, de la misma manera que equilibrio y compatibilidad aseguran dicha igualdad entre ambas formas de medir el trabajo. En el esquema se señalan igualmente las comprobaciones habituales de resistencia o rigidez de acuerdo a las ecuaciones 2.7 y 2.9.

Dicho esquema se particulariza de forma diferente en cada caso mediante la construcción concreta de las matrices $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{k}$ que, como veremos en ejemplos más adelante, resultan de extremada sencillez una vez adoptado el modelo de la estructura. En ésta, los componentes elementales —barras usualmente— definen $\boldsymbol{k}$, mientras que los modos de deformación admitidos, —que ligan los movimientos a las deformaciones— definen $\boldsymbol{B}$, deduciéndose de éstas el resto de relaciones precisas para deducir los desplazamientos correspondientes al estado de cargas considerado.

Los capítulos siguientes aplican el anterior aparato al análisis de estructuras típicas de edificación, y a la reflexión sobre las mismas.

Parte II

Análisis

Capítulo 3

Elementos en Estructuras de edificios

En este capítulo se analizan los elementos típicos que constituyen las estructuras de edificación. Es sabido que la mayor dificultad en la comprensión del comportamiento estructural radica en la atribución de un modelo teórico a una construcción real: una vez establecido el modelo, su análisis es claro. La dispersión de resultados sobre el análisis de un modelo dado es muy reducida, si es que existe, mientras que la dispersión en la asignación de modelos a construcciones reales es a menudo importante, de tal modo que muchos de los desacuerdos entre especialistas están en su mayoría en la elección del modelo a aplicar. Por ello en este apartado se caracterizan los elementos básicos que forman parte del modelo estructural en edificación.

3.1. Punto, rebanada, pieza, y estructura

Hemos visto en el capítulo anterior que todo análisis de una estructura comporta confrontar la visión sobre ésta desde dos perspectivas, interna y externa. Dicho cambio de perspectiva no supone más que una formulación de la mismas relaciones en un formato diferente, debiendo mantenerse en el cambio las condiciones establecidas, tanto materiales, como de equilibrio y compatibilidad.

En la mayor parte de los tipos estructurales en edificación, dicho cambio puede hacerse considerando niveles progresivos de generalización, a través de lo que en el capítulo anterior hemos llamado *agregados*, y que ahora podemos describir con más precisión. Todos ellos responden al concepto de *partición* o región de la estructura, región que, en el caso de máxima amplitud, puede llegar a abarcar toda la estructura.

La relación entre magnitudes en regiones cada vez más amplias se deduce a partir de las de regiones más reducidas, y simpre en base a los mismos recursos: se estudian las magnitudes agregadas de deformación y solicitación que definen el estado en el contorno de la región mayor, y se determinan sus relaciones a partir de las ya establecidas en su interior. Se trata en muchos casos de reducciones de las expresiones de volumen a las del contorno de conexión de la región estudiada. En el capítulo anterior hemos empleado como ejemplos muchas de dichas relaciones, que ahora revisamos en forma más sistemática.

3.1.1. Estado de tensión en un punto

Este análisis es el propio de cualquier introducción a la teoría de la elasticidad: debe formularse lo que se entiende por deformación y solicitación en un punto. La elección clásica sigue la vía abierta por Cauchy: las tensiones se definen mediante el tensor de tensiones de Cauchy, descrito en la ecuación 2.1, y las deformaciones mediante el correspondiente tensor de deformaciones. El primero de los conceptos describe las solicitaciones sobre el punto mediante las tensiones que se ejercen en un cubo paralelo a los ejes coordenados y de tamaño infinitesimal en torno al punto, mientras que el segundo describe las deformaciones de la esfera de radio unidad que envuelve al punto, a través del desplazamiento que experimentan los tres puntos de dicha esfera situados en la rama creciente de los ejes.

Las relaciones analizadas en dichas magnitudes incluyen las precisas para el cambio de ejes de referencia, y las relaciones mutuas de esfuerzo–deformación son objeto de las teorías de la elasticidad y de la plasticidad.

En este análisis se expresan en forma de función las variables de tensión y deformación descritas. Se expresan igualmente las relaciones entre dichas funciones requeridas para que exista el equilibrio y la compatibilidad —relaciones diferenciales, en tanto que el equilibrio se dará entre las diferencias de tensión entre caras opuestas del cubo y las cargas aplicadas a éste, o entre diferencias de movimientos de puntos próximos y la deformación del punto considerado— Se añaden las relaciones correspondientes a la constitución material elegida, así como las condiciones en el contorno de la estructura —cargas y coacción a los desplazamientos— y la solución, si existe, del correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales resuelve el problema.

A menudo la formulación de equilibrio y compatibilidad se realiza aprovechando las propiedades del principio del trabajo virtual, considerando los estados de deformación o esfuerzo buscados, y sus *variaciones* que, en tanto mantengan el equilibrio y la compatibilidad, deben producir trabajo total nulo —al restar trabajo externo y trabajo interno— dando lugar a métodos de corte variacional, que son los empleados sistemáticamente en los llamados métodos aproximados, como es el de los elementos finitos.

Se remite a los textos de teoría de la elasticidad para su análisis detallado. Aquí interesa el comportamiento del punto como peldaño inicial para el análisis de la pieza.

Se consideran por tanto, ahora, los aspectos asociados a las estructuras de barras. En éstas, la dimensión longitudinal es grande en relación a las dimensiones transversales, por lo que es eficiente simplificar el comportamiento tridimensional de la barra al comportamiento a lo largo de su directriz —la línea que une los sucesivos puntos en que se sitúa el centro de gravedad de las secciones planas ortogonales a la longitud de la barra, en puridad, ortogonales a la directriz misma. En las barras los estados de tensión responden básicamente a las aplicadas sobre tales secciones, despreciándose el efecto local de las tensiones aplicadas como cargas a las caras laterales de la barra, como veremos en el siguiente apartado.

3.1.2. Estado de solicitación en una rebanada

En las estructuras de barras, la región de referencia básica para el análisis es la rebanada, región delimitada por dos secciones o cortes sucesivos y próximos en

la barra, y ortogonales a su directriz. La pequeña región delimitada materializa el equilibrio entre esfuerzos opuestos en las dos secciones, o caras, y puede estar sometida a carga, que equilibra mediante leves diferencias entre los esfuerzos en ambas caras. Dicha región constituye un *agregado* de puntos materiales, cuyo análisis conjunto —podríamos llamarle colectivo— simplifica el estudio de las barras de forma muy apreciable.

Se denomina fibra a toda región infinitesimal paralela a la directriz entre ambas caras de la rebanada.

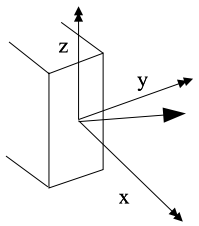


Figura 3.1: Sección y solicitaciones

Las resultantes de fuerza posibles sobre una de las caras determinan los esfuerzos posibles, que son las 6 resultantes posibles de fuerzas en el espacio: normal, fuerzas tangentes o cortantes, momento torsor, y momentos flectores $(N_x, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z)$. A dichas resultantes de fuerza deben acompañar, según los criterios establecidos en el capítulo anterior, seis componentes de deformación que correspondan en términos energéticos a las anteriores componentes de esfuerzo, y que serán el alargamiento, y las distorsiones para los términos de fuerza, que suponen desplazamientos relativos de las caras consideradas, y las rotaciones relativas entre dichas caras, a saber, la torsional, y las de flexión —cambios de curvatura— que se corresponden cada una de ellas con los términos de momento $(\epsilon, \gamma_y, \gamma_z, \eta_x, c_y, c_z)$. Para asegurar medidas consistentes se consideran movimientos relativos entre caras, en ejes referidos a sus centros de gravedad, y en caras distantes en la unidad, por lo que los términos de deformación son términos unitarios, y por tanto adimensionales para las fuerzas: alargamiento unitario, o distorsiones angulares, pero tienen dimensiones inversas a las longitudes para los términos correspondientes a los momentos: curvatura, o rotación por unidad de longitud. De este modo, al obtener el producto entre esfuerzo y deformación —el trabajo— por unidad de longitud —para la rebanada de tamaño unidad— deben resultar magnitudes que dimensionalmente son fuerzas tanto en los desplazamientos como en las rotaciones, para que al integrarlas a lo largo de las longitudes reales resulten trabajos.

Si consideramos el estado de tensiones posibles de un punto situado en una cara de la rebanada, observamos que aparecen tres de las seis componentes del tensor de tensiones: $\boldsymbol{f} = (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$, mientras que las otras tres, $(\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz})$, resultan indefinidas en el corte. Las tres componentes que no aparecen en el corte pueden deducirse una vez establecidas las tensiones que sí quedan representadas en él, a través del equilibrio y considerando la forma en que se aplican las cargas al contorno de la rebanada, pero usualmente son de valores tan pequeños en relación con las otras tres que pueden despreciarse, suponiéndolas nulas.

El equilibrio exige que las fuerzas representadas en una cara de la rebanada sean precisamente resultantes de las tensiones existentes, por lo que considerando la cara positiva resulta inmediato que[1]

$$\begin{gathered} N_x = \int \sigma_x \, dA; \quad T_y = \int \tau_{xy} \, dA; \quad T_z = \int \tau_{xz} \, dA; \\ M_x = \int y\tau_{xz} \, dA - \int z\tau_{xy} \, dA; \quad M_y = \int z\sigma_x \, dA; \quad M_z = -\int y\sigma_x \, dA \end{gathered} \tag{3.1}$$

Dado que en las barras reales, esbeltas, las deformaciones acumuladas como distorsiones —la energía de deformación acumulada en las distorsiones— son pequeñas en relación con las demás, suele prescindirse en el modelo de rebanada de las distorsiones, lo que obliga en contrapartida a no emplear los cortantes como variables, y por lo tanto, a deducir los cortantes exclusivamente del equilibrio con el resto de esfuerzos —en particular, si la barra es recta, del equilibrio de momentos de la rebanada, por el que el cortante es directamente la derivada de los momentos— De este modo los esfuerzos básicos que representan el comportamiento de la rebanada son $\boldsymbol{F} = (N_x, M_x, M_y, M_z)$ que se corresponden con las deformaciones $\boldsymbol{U} = (\epsilon, \eta_x, c_y, c_z)$.

Puede observarse que, en las deformaciones consideradas relevantes, las de torsión responden a movimientos–esfuerzos tangenciales en las fibras, mientras que los alargamientos y los cambios de curvatura se derivan de movimientos longitudinales en las fibras. Dicha diferencia sugiere dos aproximaciones separadas al comportamiento: torsiones por una parte, y esfuerzos normales y flexiones por la otra[2].

Torsión uniforme en una sección hueca delgada

Sólo se analizan aquí someramente las secciones huecas de pequeño espesor, por su facilidad, dejándose el estudio riguroso de la torsión para textos especializados.

En la figura se representa una sección hueca delgada genérica sometida a torsión uniforme a lo largo de la longitud unidad. Las tensiones en la rebanada son sólo tangenciales τ que deben ser paralelas por equilibrio a la tangente al tubo, y que suponemos constantes en el espesor, aunque puedan variar para cada posición sobre la sección del tubo. Un corte longitudinal en el tubo permite ver la tensión rasante correlativa de la que aparece en la sección, y el equilibrio

[1] Las relaciones que siguen pueden establecerse recurriendo al principio de los trabajos virtuales, multiplicando directamente las fuerzas–esfuerzos por un estado arbitrario de deformación que por ejemplo, en el caso de esfuerzos asociados a las tensiones normales, podemos definir por el desplazamiento y rotación de una cara respecto de la otra en ejes y, z definidos en el centro de gravedad de la sección, por elongación de la barra, y su curvado: $(\bar{\varepsilon}, \bar{c}_y, \bar{c}_z)$. Igualando trabajos externo e interno:

$$\bar{\varepsilon} N_x + \bar{c}_y M_y + \bar{c}_z M_z = \iint (\bar{\varepsilon} + \bar{c}_y z - \bar{c}_z y)\sigma \, dy \, dz.$$

Como las relaciones deben ser válidas para cualquier deformación arbitraria, basta anular sucesivamente todas las componentes de deformación supuestas menos una para obtener las expresiones buscadas.

[2] Se trata del enfoque apropiado para la llamada torsión uniforme, de Saint Vénant, o torsión sin alabeo, representativa del comportamiento de las piezas huecas o macizas, aunque insuficiente para describir el comportamiento en torsión de las secciones delgadas abiertas.

longitudinal de un trozo de tubo obtenido con dos de dichos cortes permite ver que el producto τe es constante (para cualesquiera posiciones, $\tau e = \tau' e'$).

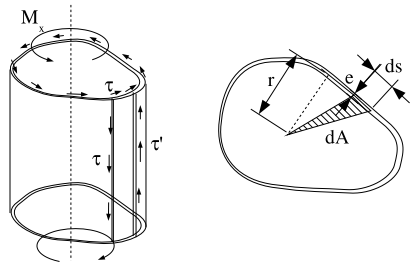


Figura 3.2: Torsión uniforme en sección hueca

De este modo, si establecemos el equilibrio, el momento torsor deberá igualarse al producido por las tensiones tangenciales descritas, por lo que

$$M_x = \oint \tau e r \, ds = \oint \tau e \, 2 \, dA$$

y puesto que τe es constante

$$M_x = 2\tau e \oint dA = 2\tau e A_e$$

de donde resulta la conocida relación que determina la tensión en cada punto

$$\tau = \frac{M_x}{2eA_e} \tag{3.2}$$

donde A_e representa el área encerrada por la línea media del espesor del tubo.

Si queremos obtener ahora la relación entre el momento torsor y la rotación por unidad de longitud de la barra, bastará igualar, para el modelo que elijamos para el comportamiento del material, la energía de deformación vista desde el interior de la barra, con la energía de deformación vista desde los esfuerzos en las caras de la rebanada, debiendo ser ambas iguales. En el caso de materiales de comportamiento regido por la ley de Hooke tenemos:

$$\frac{1}{2} M_x \eta_x = \frac{1}{2} \iiint \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f} \, dv$$

$$M_x \eta_x = \iint \tau \gamma e \, ds \, dl$$

Puesto que se trata de la longitud unidad debe ser $l = 1$, y empleando $\gamma = \tau / G$ resulta

$$M_x \eta_x = \oint \frac{\tau^2 e}{G} ds$$

$$M_x \eta_x = \oint \frac{M_x^2 e}{4e^2 A_e^2 G} \, ds$$

$$\eta_x = \frac{M_x}{4A_e^2 G} \oint \frac{ds}{e}$$

de modo que la relación momento a giro unitario es sencillamente

$$\frac{M_x}{\eta_x} = \frac{4A_e^2 G}{\oint \frac{ds}{e}} = GI_T \tag{3.3}$$

Deformaciones de una rebanada recta debidas a tensión normal

Supondremos en la rebanada un comportamiento deformacional que responda a la hipótesis de Navier, a saber, que la sección plana permanece plana tras la deformación.

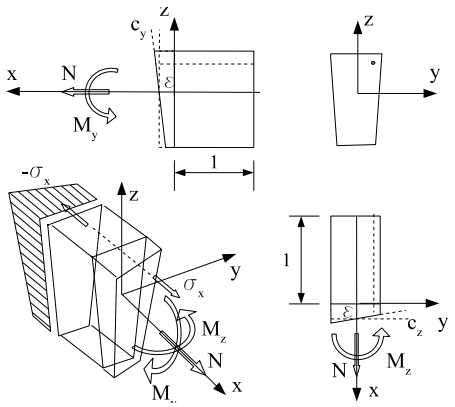


Figura 3.3: Tensión normal y deformación de la rebanada

Establecemos como movimientos relativos de la cara positiva, referidos a su centro de gravedad[3], el desplazamiento por elongación de la rebanada y las dos rotaciones debidas a la curvatura que adquiere ésta: (ε, c_y, c_z), en correspondencia con los esfuerzos de tracción axial y momentos N, M_z, M_y considerados al analizar las resultantes de solicitación al principio de este apartado. Se obtienen a continuación las correspondientes relaciones esfuerzo–deformación para relaciones tensión–deformación lineales en cualquier punto material. En tales circunstancias tenemos:

$$N = \int \sigma_x \, dA = \int \epsilon_x E \, dA$$

siendo en cada punto $\epsilon_x = \varepsilon + z c_y - y c_z$ con lo que

$$N = EA\,\varepsilon$$

[3]Puede hacerse notar que el hecho de haber elegido el centro de gravedad de la sección como punto de referencia para situar los esfuerzos y las deformaciones es una elección posible, alternativa a otras. Podríamos haber seleccionado un punto en la fibra inferior, y habríamos obtenido otras relaciones, válidas como alternativa. En éstas, la rotación supondría simultáneamente elongaciones y cambios de curvatura, y, por lo tanto, las relaciones entre elongaciones y rotaciones con normales y momentos resultarían acopladas, no pudiendo aislarse unos parámetros de otros. Es de hecho una elección que se realiza en ocasiones, como en el análisis de arcos con resistencia nula en tracción y resitencia infinita en compresión, porque en ese caso el extremo de la junta se comporta como una rótula, resultando igualados y anulados los efectos del normal por la elongación más el momento por la rotación. La ventaja de la elección realizada para el caso general radica en que, siendo el comportamiento elástico, la relación entre alargamiento y esfuerzo normal resulta independiente de la existente entre el cambio de curvatura y el momento.

al estar referidos los ejes al centro de gravedad y resultar por tanto nulos los dos últimos sumandos de la integral por serlo sendos momentos estáticos. Para las rotaciones de las caras de la rebanada derivadas de las curvaturas en ambos sentidos tendremos:

$$M_y = \int z\sigma_x \, dA = \int z\epsilon_x E \, dA =$$
$$\int z(\varepsilon + zc_y - yc_z)E \, dA = \int z^2 c_y E \, dA$$
$$M_y = EI_y c_y$$
$$M_z = \int (-y)\sigma_x \, dA = \int (-y)\epsilon_x E \, dA =$$
$$\int (-y)(\varepsilon + zc_y - yc_z)E \, dA = \int y^2 c_z E \, dA$$
$$M_z = EI_z c_z$$

dado que las integrales de los términos lineales en y o en z deben anularse por igual motivo que antes y siendo igualmente nulo el término en yz si los ejes son los principales de inercia[4].

Agrupando las relaciones obtenidas en estos dos últimos apartados resultan las que vimos recogidas en la sección referida a la rebanada en el apartado 2.6 sobre constitución material.

3.1.3. Estado de esfuerzos y deformaciones en una barra recta

El análisis de una barra completa como un agregado único de todas las rebanadas que la componen permitirá posteriormente analizar con mucha facilidad la estructura como un agregado de barras.

Se trata de un caso particular de un problema de la mayor importancia, que consiste en reducir la formulación de un problema en términos continuos, es decir, representando sus propiedades mediante funciones de punto que recorren de forma continua el dominio de interés —y que por tanto se aplican a un conjunto infinito de puntos ideales—, a su formulación en términos discretos, es decir, representando sus propiedades mediante un conjunto finito de valores discretos a partir de los que pueden expresarse los del resto del continuo.

Dicho análisis manifiesta un problema particular de cierta relevancia, en la medida en que las barras son agregados de gran tamaño, frente a los casos anteriores en los que una dimensión, al menos, era infinitesimal. El problema está en la gran variabilidad en las cargas que pueden ser aplicadas a la barra, que no existía en los casos precedentes. Por ello estudiamos en primer lugar la

[4]La magnitud $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{bmatrix} dA$$

se comporta ante cambios de ejes como un tensor como es fácil ver considerando cómo serían los cambios de referencia del objeto $\begin{bmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$, recordando el formato que tenía en la ecuación 2.3 la proyección de un vector sobre ejes rotados respecto a los iniciales.

Por ello las expresiones resultan correctas sólo en los ejes principales de inercia para las que el término cruzado es nulo.

barra en la forma clásica para introducir posteriormente la misma sistemática que en los casos anteriores.

En la figura se representan todas las magnitudes en juego en un problema de flexión debido a cargas perpendiculares a la barra, a saber, la deformada formada por los descensos z —llamada elástica en la resistencia de materiales clásica— los giros θ de las secciones respecto de sus posiciones iniciales verticales, derivados de la inclinación de la deformada, y la diferencia entre descensos de puntos sucesivos, las curvaturas $c = 1/R$ inducidas por la diferencia entre giros de secciones próximas, y relacionada directamente con los momentos flectores aplicados a la sección M, los esfuerzos cortantes T, asociados a la existencia de variaciones en los momentos, y las cargas q, responsables de la variación de cortantes en la rebanada.

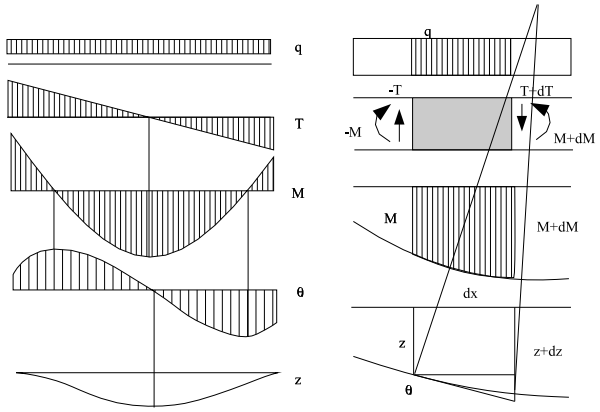


Figura 3.4: Funciones de movimiento y esfuerzos en vigas

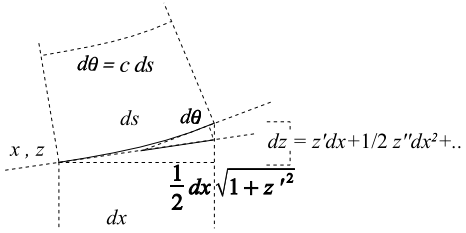
De la figura, y suponiendo los movimientos pequeños[5], pueden deducirse las

[5]Si se consideran movimientos pequeños, la curvatura c, cuya expresión exacta según la figura es

$$c = \frac{z''}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

puede simplificarse empleando la aproximación que corresponde a una deformada *casi* horizontal

$$c = z''$$



conocidas relaciones

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial z}{\partial x} = z' \\ c &= -\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\theta' = -z'' \\ T &= \frac{\partial M}{\partial x} = M' \\ q &= -\frac{\partial T}{\partial x} = -T' = -M''. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Las dos primeras son las relaciones de compatibilidad, y las dos últimas las de equilibrio. A ellas puede añadirse la relación de constitución material, que en este caso será la relación momento–curvatura. Hemos visto que en materiales lineales dicha relación se representa por

$$M = EIc. \tag{3.5}$$

La estrategia adoptada en resistencia de materiales clásica para determinar el estado de la barra consiste en integrar la ecuación diferencial resultante de agrupar las anteriores ecuaciones. La expresión clásica en la literatura, correspondiente a la condición $EI =$ constante es[6]:

$$q = EIz^{IV}. \tag{3.6}$$

En dicha integración aparecerán cuatro constantes de integración. Si se considera la barra aislada, dichas constantes se determinan en base a las condiciones de contorno en los dos extremos, ya sea geométricas —descenso nulo si hay apoyo, giro nulo si hay empotramiento— o mecánicas —cortante nulo si es extremo libre, momento nulo si el extremo es apoyado o libre—. Puesto que en todo extremo hay cuatro magnitudes, dos mecánicas y dos cinemáticas, de las cuales necesariamente se conocen dos —y se ignoran las otras dos— las condiciones de contorno son suficientes para resolver el problema planteado.

En general, la barra formará parte de un entramado más complejo, por lo que la anterior solución no es posible de aplicar sin conocer previamente los suficientes movimientos o esfuerzos de extremo.

En estructuras de comportamiento elástico–lineal puede analizarse ese problema más complejo aplicando el principio de superposición que permite obtener el estado final como superposición de dos estados diferentes cuyas configuraciones estáticas y cinemáticas sumadas aportan la solución.

Para ello se consideran los dos sistemas formados, el primero por la barra cargada y coaccionada en sus extremos de forma que éstos ni giran ni se desplazan —empotramiento perfecto— En este sistema las reacciones coaccionan los extremos en función de la ley de cargas existente, adoptando la barra la ley de esfuerzos y la deformada requeridas para cumplir las ecuaciones 3.4 y 3.5. El segundo sistema consiste en el análisis del entramado formado por todas las barras sometido a las acciones de fuerzas contrarias a las reacciones del (de los) sistemas precedentes —de empotramiento perfecto— En este segundo sistema ya no hay cargas distribuidas a lo largo de las barras, por lo que el análisis de éstas es más sencillo. Es, por otro lado, evidente que la superposición de ambos sistemas es equivalente al problema original, dado que

[6] Si EI es variable resulta, naturalmente $q = EIz^{IV} + 2(EI)'z''' + (EI)''z''$

- Las cargas, suma de las establecidas sobre las barras más las reacciones y sus contrarias, que se anulan, suman las cargas originales
- Los esfuerzos internos están en equilibrio al proceder de la suma de dos estados equilibrados
- Las deformaciones son compatibles y respetan las condiciones de sustentación, pues ambos estados separados lo hacen,
- Se cumplen las condiciones de rigidez, por razón del principio de superposición, considerado sección a sección

Estas reflexiones permiten plantear nuevamente el problema de la barra que forma parte de un entramado mayor, dejando apartadas las cuestiones de carga aplicada sobre la misma: dichas cargas pueden siempre considerarse en el problema separado —de empotramiento perfecto[7]—

Tenemos, por tanto, la barra sometida a movimientos en sus extremos y por tanto a esfuerzos en sus extremos, pero con carga nula sobre ella misma, de modo que la ecuación a cumplir es la

$$EIz^{IV} = 0. \tag{3.7}$$

Es fácil comprender que la integración de la anterior ecuación, para una barra de sección constante, proporciona un polinomio de tercer grado cuyos coeficientes deben determinarse en función de las condiciones impuestas en los extremos.

Volvemos por tanto a plantear la cuestión de relacionar los movimientos de extremo de la barra con el estado de deformación existente sin cargas a lo largo de la barra.

Consideraremos en primer lugar los esfuerzos normales. Hemos aplicado las reflexiones precedentes al caso de cargas y movimientos transversales a la barra, pero es claro que pueden aplicarse igualmente al de las longitudinales. Éstas se asocian a movimientos longitudinales. No existiendo cargas longitudinales, el movimiento de extremo relevante es el que corresponde a la elongación de la barra u, asociado al esfuerzo normal en el extremo de ésta, N. La relación es sobradamente conocida, y evidente a partir de la de la rebanada, al ser $\epsilon = u/l$:

$$N = \frac{EA}{l}\, u$$

En el caso de las deformaciones transversales consideraremos separadamente los movimientos transversales en ambos planos de flexión.

Para cualquiera de dichos planos hemos despreciado, en el caso de la rebanada, las deformaciones por cortante, decidiendo determinar los cortantes a partir de la ley de momentos. Podemos aquí mantener la misma estrategia, lo que supone que los cortantes de extremo deberán deducirse a partir de los momentos

[7] En términos matemáticos más abstractos, la solución para carga distribuida nula sería la solución de la ecuación diferencial homogénea, y la solución de *empotramiento perfecto* no sería más que una solución particular de la ecuación diferencial del problema original, de modo que la solución general, suma de la de la homogénea más la particular daría el abanico de soluciones para todas las condiciones de extremo posibles. En dicho abanico, considerando la compatibilidad en las conexiones con otras barras o la sustentación, podría determinarse la solución al problema.

Figura 3.5: Viga deformada por movimientos de sus extremos

de extremo —lo que es fácil— pero la implicación de lo anterior es que no podemos emplear como movimientos de extremo los desplazamientos transversales relativos, sino sólo los giros relativos de extremo. De tal modo que las referencias adecuadas a considerar en la barra son los giros de extremo en relación con la línea que los une: la barra tiene así un movimiento rígido que traslada los extremos de posición, movimiento que no produce deformación, y no se considera, —más una elongación si existen esfuerzos normales— más una rotación en cada uno de sus dos extremos, rotación asociada a momentos en ambos extremos.

La deformada elástica es, en estas condiciones, un polinomio de tercer grado cuyos coeficientes deben determinarse para las condiciones de desplazamiento transversal nulo en ambos extremos, izquierdo y derecho, y las rotaciones prescritas en ellos. Considerando ejes en el centro de la barra,

$$z = ax^3 + bx^2 + cx + d; \qquad \begin{cases} z_{-l/2} = 0 \\ z_{l/2} = 0 \\ z'_{-l/2} = \theta_i \\ z'_{l/2} = \theta_d \end{cases}$$

Como $z' = 3ax^2 + 2bx + c$, las condiciones de extremo exigen que

$$\begin{aligned} -a\frac{l^3}{8} + b\frac{l^2}{4} - c\frac{l}{2} + d &= 0 \\ a\frac{l^3}{8} + b\frac{l^2}{4} + c\frac{l}{2} + d &= 0 \\ 3a\frac{l^2}{4} - 2b\frac{l}{2} + c &= \theta_i \\ 3a\frac{l^2}{4} + 2b\frac{l}{2} + c &= \theta_d \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{bmatrix} -\frac{l^3}{8} & \frac{l^2}{4} & -\frac{l}{2} & 1 \\ \frac{l^3}{8} & \frac{l^2}{4} & \frac{l}{2} & 1 \\ \frac{3l^2}{4} & -l & 1 & 0 \\ \frac{3l^2}{4} & l & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix}$$

que puede resolverse invirtiendo la matriz cuadrada y multiplicando

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{l^3} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l} \\ -\frac{3}{2l} & \frac{3}{2l} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{l}{8} & -\frac{l}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i + \theta_d \\ -\frac{\theta_i}{2} + \frac{\theta_d}{2} \\ -\frac{\theta_i}{4} - \frac{\theta_d}{4} \\ \frac{\theta_i}{8} - \frac{\theta_d}{8} \end{bmatrix}.$$

De este modo la deformada se expresa como

$$z = (\theta_i + \theta_d)\frac{x^3}{l^2} + (-\theta_i + \theta_d)\frac{x^2}{2l} + (-\theta_i - \theta_d)\frac{x}{4} + (\theta_i - \theta_d)\frac{l}{8}.$$

expresión que ahora podemos emplear para analizar la relación entre el comportamiento interno de la barra y su comportamiento externo, referido a los movimientos y esfuerzos de sus extremos, que son con los que la barra conecta con la estructura.

Una excelente forma de hacerlo corresponde a la técnica empleada en el método de los elementos finitos (MEF) del que hablaremos en el apartado 4.2 en el que nos referiremos a este ejemplo, y que es la forma que vamos a emplear.

Si, a partir de la expresión anterior, describimos las deformadas correspondientes a un giro unidad en uno de los extremos y giro nulo en el otro obtendremos, para cada uno de los extremos, las expresiones

$$\begin{aligned} n_i(x) &= \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{2l} - \frac{x}{4} + \frac{l}{8} \\ n_d(x) &= \frac{x^3}{l^2} + \frac{x^2}{2l} - \frac{x}{4} - \frac{l}{8} \end{aligned} \tag{3.8}$$

y podremos escribir

$$z = \theta_i n_i(x) + \theta_d n_d(x).$$

o, en formato matricial,

$$z = \begin{bmatrix} n_i(x) & n_d(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

ecuación que puede representarse de forma general mediante la expresión más abstracta $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}$, en la que las funciones $\boldsymbol{z}$ representan el campo de desplazamientos descrito para el continuo analizado —al tratarse de la barra, dichos desplazamientos son la deformada, con una sola componente— las funciones $\boldsymbol{N}$ son funciones que *interpolan* el campo de desplazamientos partiendo en cada una de ellas de un solo movimiento unidad de entre los de un conjunto, que se elige para representar el movimiento completo, y los valores $\boldsymbol{a}$ son los movimientos efectivos de dichos puntos prefijados, de tal modo que la combinación lineal representada por $\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}$ describe el desplazamiento completo $\boldsymbol{z}$.

Las deformadas elegidas correspondientes a los giros unidad aislados se llaman, en la técnica del MEF, *funciones de forma*, y no son otra cosa que una *base* que permite representar, mediante sus combinaciones lineales, todas las deformadas posibles de la barra por rotación de sus extremos, empleando como coeficientes de la combinación lineal los propios giros de extremo[8].

Ahora podemos tratar de describir el comportamiento de la barra sin cargas mediante los parámetros correspondientes a los movimientos y esfuerzos de extremo θ_i, θ_d, m_i, m_d.

[8] Como las funciones que estamos empleando se han obtenido representando de forma exacta las condiciones internas de equilibrio, compatibilidad y rigidez, el análisis aportará relaciones exactas entre el comportamiento externo y el interno de la barra. Cuando el problema geométrico es de mayor dificultad, lo que es usual en problemas superficiales o volumétricos, pueden usarse como funciones de forma aproximaciones que relajan algunas de dichas condiciones, resultando soluciones sólo aproximadas, cuyo análisis de validez es una de las cuestiones que debe abordar el MEF.

La barra estará equilibrada en dicha condición con una deformación z compatible definida por la ecuación 3.9, deformación que además responde a lo largo de toda la barra a la condición de rigidez adoptada para sus rebanadas.

Si suponemos movimientos en ambos extremo —sean por ejemplo los giro $\begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix}$— y adoptamos una deformada compatible con dichos movimientos (denotada por $\bar{z}$, a la que corresponde la curvatura $\bar{c} = \bar{z}''$), podremos emplear el principio de los trabajos virtuales para igualar el trabajo externo, el realizado por los momentos de extremo m_i, m_d en el movimiento, con el trabajo interno, es decir, el desarrollado por los esfuerzos internos en la deformación adoptada.

$$W_e = W_i$$

$$\begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_i\\ m_d\end{bmatrix} = \int_{-l/2}^{l/2} \bar{c}M\,dx = \int_{-l/2}^{l/2} \bar{z}''M\,dx.$$

Como los esfuerzos de la barra dependen de su deformada, también puede escribirse la expresión anterior en la forma

$$\begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_i\\ m_d\end{bmatrix} = \int_{-l/2}^{l/2} \bar{z}''EI\,z''\,dx.$$

Una forma adecuada de representar la deformada compatible $\bar{z}$ es expresarla mediante la ecuación 3.9, para los movimientos de extremo $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix}^T$, siendo $\bar{\theta}_d = 0$ en el caso que consideramos, de manera que

$$\bar{z}'' = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\begin{bmatrix}n_i(x) & n_d(x)\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\bar{\theta}_i\\ \bar{\theta}_d\end{bmatrix}$$

que podemos escribir trasponiendo el producto matricial[9]

$$\bar{z}'' = \begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\begin{bmatrix}n_i(x)\\ n_d(x)\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 n_i(x)}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 n_d(x)}{\partial x^2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_i''(x)\\ n_d''(x)\end{bmatrix}$$

y por lo tanto la ecuación que iguala los trabajos es, empleando la ecuación 3.9 para definir la deformada real

$$\begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_i\\ m_d\end{bmatrix} = \int_{-l/2}^{l/2}\begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_i''(x)\\ n_d''(x)\end{bmatrix} EI\begin{bmatrix}n_i''(x) & n_d''(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_i\\ \theta_d\end{bmatrix}dx$$

expresión que, una vez desarrollada resulta, para módulo de elasticidad constante, en la

$$\begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_i\\ m_d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix} EI_0\begin{bmatrix}\int \frac{I}{I_0}n_i''(x)n_i''(x)\,dx & \int \frac{I}{I_0}n_d''(x)n_i''(x)\,dx\\ \int \frac{I}{I_0}n_i''(x)n_d''(x)\,dx & \int \frac{I}{I_0}n_d''(x)n_d''(x)\,dx\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_i\\ \theta_d\end{bmatrix}$$

en la que $n_i''(x) = \frac{6x}{l} - \frac{1}{l}$, $n_d''(x) = \frac{6x}{l} + \frac{1}{l}$, y en la que pueden, por tanto, obtenerse con facilidad las integrales definidas, que en el caso de inercia constante

[9] En general estamos usando, por consistencia, el producto escalar de desplazamientos por movimientos o deformaciones por esfuerzos en el orden $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{f}$. En el caso que nos ocupa la curvatura se multiplicará por los esfuerzos, pero en un problema que tuviese varias componentes de deformación, se emplearía la expresión traspuesta de las componentes de deformación para multiplicar por los esfuerzos.

son del tipo $\int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{6x}{l} \mp \frac{1}{l}\right) \left(\frac{6x}{l} \mp \frac{1}{l}\right) dx$ dando lugar a la expresión

$$\begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_i \\ m_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix} \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix}.$$

Como la condición expresada por la anterior ecuación debe cumplirse para cualquier movimiento–deformación definido por parámetros $\begin{bmatrix}\bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d\end{bmatrix}$ arbitrarios, resulta que debe cumplirse

$$\begin{bmatrix} m_i \\ m_d \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

que es la ecuación de rigidez de la barra que tratábamos de obtener.

La estrategia empleada resulta completamente general y permite abordar problemas muy variados de discretización como veremos someramente en el apartado destinado al método de los elementos finitos.

Esfuerzos de empotramiento perfecto

Hemos visto que una cuestión central en el paso de descripciones continuas a discretas, como es el caso de las barras que ahora analizamos, está en considerar las condiciones de carga local aplicada en la barra —en el elemento de dimensiones finitas— considerada. Hemos de considerar, en efecto, el estado de deformación de ésta sometida a las cargas aplicadas localmente, para la condición de inexistencia de movimiento en sus extremos —empotramiento perfecto—, estado en el que se ejercen sobre la barra esfuerzos de extremo, de empotramiento perfecto, además de las deformaciones locales necesarias para equilibrar las cargas. De cara al análisis debemos ser capaces de reconstruir, tanto los esfuerzos de extremo, como la deformada de la barra en la situación de empotramiento. Puesto que, conocidos los esfuerzos de extremo, deducir los esfuerzos —y por ende las deformaciones locales— de las rebanadas sucesivas es un ejercicio sencillo —los esfuerzos se obtienen por simple equilibrio, y las deformaciones a partir de las curvaturas, que se obtienen directamente de la ley de momentos—, el problema se reduce a determinar los esfuerzos de extremo correspondientes a la condición de empotramiento perfecto.

La manera más sencilla de obtener dichos esfuerzos consiste en aplicar el principio de los trabajos virtuales considerando como sistemas los siguientes:

- el sistema equilibrado será el de las cargas locales con los esfuerzos de extremo —desconocidos— que las equilibran
- como sistema de deformaciones compatibles empleamos los definidos por las funciones de forma $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}$ empleadas en el apartado anterior

de modo que en el producto entre ambos sistemas, el trabajo de las cargas $\int zq\,dx$ deberá ser igual al realizado en las rotaciones por los esfuerzos de extremo, resultando

$$\begin{bmatrix} M_i & M_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix} = \int zq\,dx = \int q \begin{bmatrix} n_i(x) & n_d(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix} dx$$

$$\begin{bmatrix} M_i & M_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int qn_i(x)\,dx & \int qn_d(x)\,dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix}$$

que, como debe ser válida para cualesquiera giros de extremo, exige que los momentos de extremo sean

$$\begin{bmatrix} M_i & M_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int qn_i(x)\,dx & \int qn_d(x)\,dx \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Si consideramos el caso de carga uniformemente repartida q constante, tendremos que

$$\begin{bmatrix} M_i & M_d \end{bmatrix} = \left[q\int_{-l/2}^{l/2} \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{2l} - \frac{x}{4} + \frac{l}{8}\,dx \quad q\int_{-l/2}^{l/2} \frac{x^3}{l^2} + \frac{x^2}{2l} - \frac{x}{4} - \frac{l}{8}\,dx \right]$$
$$\begin{bmatrix} M_i & M_d \end{bmatrix} = \left[\frac{ql^2}{12} \quad -\frac{ql^2}{12} \right].$$

3.1.4. Estado de una estructura sometida a cargas

Hemos visto hasta aquí cómo representar los estados de esfuerzo y deformación de elementos genéricos de una estructura, si bien nos hemos centrado en los que constituyen las estructuras de barras. El problema ahora es construir la representación de los estados de esfuerzo y deformación de la estructura completa, que supondremos constituida por barras, y sometida a cargas aplicadas, bien a las barras mismas, bien a los puntos de unión entre éstas: los nudos.

Al igual que las barras se representan mediante la línea de su directriz —trazada por los centros de gravedad de las secciones—, se representan los nudos mediante puntos correspondientes a la intersección de las directrices de las barras. Tal representación es clásica, pero resulta equívoca en muchos casos, como muestra la figura 3.6.

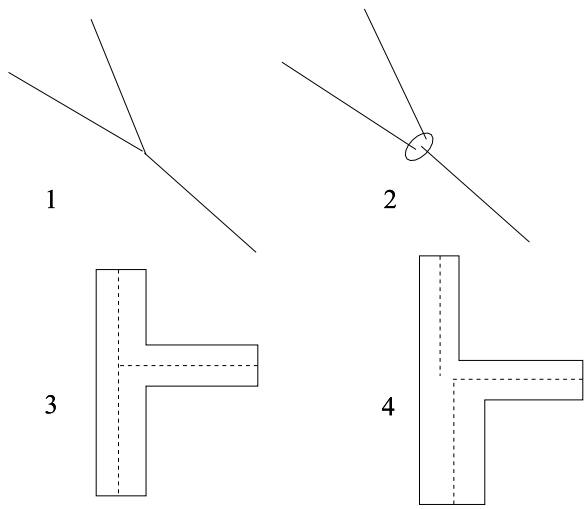


Figura 3.6: Nudo extenso

En efecto, puede representarse el nudo por un punto, pero a menudo las barras no concurren en uno sólo, tanto en estructuras de barras sometidas sólo a esfuerzos axiales, como en estructuras sometidas a esfuerzos de flexión. Debe considerarse la posibilidad de lo que se ha dado en llamar *nudo extenso* (ver [Cervera, 1995]).

Para ello se elige como base de representación del nudo un punto arbitrario, y unos ejes de referencia en él. El punto elegido es usualmente el extremo de una de las barras, aunque puede ser cualquier otro, como podría ser uno relevante en el replanteo de la estructura. Los ejes de referencia pueden ser los generales de la estructura o cualesquiera otros.

Al nudo se asocian todos los movimientos que pueden suponer deformaciones en las barras, de modo que, en estructuras articuladas en las que los extremos de las barras coinciden en los nudos, los movimientos posibles de cada uno de éstos son sólo desplazamientos. Sin embargo, si los extremos de barras no coinciden, las rotaciones del nudo pueden suponer variaciones en los esfuerzos de las barras, como puede verse en el ejemplo 2 de la figura 3.6, por lo que dicho nudo debería representarse por sus desplazamientos y su rotación.

Si estamos considerando estructuras de barras flectadas, en general se considerarán asociados a los nudos tanto desplazamientos como rotaciones (sólo una si el modelo es plano). Las barras que acometen al nudo tienen sus extremos en puntos que no tienen por qué coincidir con el que representa al nudo, pero se consideran rígidamente unidas al mismo, o lo que es lo mismo, los movimientos del nudo inducen movimientos de los extremo de las barras, que acompañan a aquél rígidamente. De este modo, si el nudo se desplaza, los extremos de barra se desplazan en la misma magnitud, y si el nudo rota, los extremos de las barras rotan —salvo si la unión es articulada— y si no coinciden en posición extemo de barra y nudo, la rotación del nudo implica además desplazamiento del extremo de la barra.

De hecho, en los párrafos anteriores no hemos hecho más que describir verbalmente las condiciones de compatibilidad entre los movimientos de los nudos —que representarán el movimiento $\boldsymbol{U}$ de la estructura— y los movimientos de extremo de las barras, que representan las deformaciones $\boldsymbol{u}$ de las partes que componen dicha estructura.

Esto nos permite establecer que la representación de la estructura se reduce a la descripción de los movimientos y fuerzas con ellos relacionadas a que están sometidos los nudos que la describen, siendo sus esfuerzos y deformaciones los correspondientes a los extremos de las barras que acometen a dichos nudos.

De este modo, hemos de considerar como cargas sobre la estructura cualesquiera de las duales energéticas de los movimientos que suponemos posibles en los nudos, y sólo éstas. Cuando las cargas se aplican directamente a los nudos, nos bastará representarlas mediante la resultante que corresponde al punto elegido para representar el nudo.

Cuando las cargas se ejercen sobre las barras, lo que es bastante usual, hemos de recurrir a desdoblar el análisis en dos fases, como ya hemos hecho en el apartado anterior.

En la primera fase supondremos que los nudos no se desplazan de ningún modo —es la fase de *empotramiento perfecto*— y las barras se deforman sometidas a las cargas aplicadas a ellas mismas más los esfuerzos de empotramiento en sus extremos que impiden el movimiento esfuerzos que podemos denominar reacciones de empotramiento perfecto pues son las que se ejercen sobre el extremo en dicha condición.

En la segunda fase, y considerando ahora la estructura completa sin cargas sobre las barras, se aplican a los nudos las resultantes de la totalidad de los esfuerzos opuestos a los de empotramiento que coaccionaban a las barras, situados en los extremos de éstas —esfuerzos que podemos denominar acciones de

empotramiento perfecto por ser opuestas a las correspondientes reacciones y ser la acciones que las barras van a ejercer sobre los nudos—, esfuerzos que deberán ser desplazados convenientemente para ser representados en los puntos elegidos para representar el nudo si éste no coincide con el extremo de la barra. De este modo puede analizarse la estructura considerando como se ha dicho más arriba los movimientos de los nudos, para un estado de cargas aplicadas a los mismos nudos, y la posterior superposición de ambos análisis —empotramiento perfecto, y movimientos de la estructura— resuelve el problema, pues hace que, finalmente, en los extremos de las barras que acometen a los nudos no se aplique carga externa alguna, al sumarse los esfuerzos de empotramiento y sus contrarios.

Un modo muy práctico de establecer las cargas aplicadas correspondientes a cada movimiento libre establecido —a cada grado de libertad de la estructura— consiste en estimar el trabajo que producen las cargas en el movimiento aislado que se considera, dando a éste valor unidad. Dado que las cargas distribuidas sobre las barras resultan ser, a los efectos del comportamiento general de la estructura, equivalentes a las acciones de empotramiento perfecto, para la estimación apuntada es indiferente considerar el efecto de cada movimiento unidad en las barras a lo largo de su longitud y obtener el trabajo de las cargas aplicadas a éstas, que estimar el efecto del movimiento unidad del nudo en los movimientos de extremo de las barras y obtener el trabajo realizado por las acciones de empotramiento perfecto. Dicho procedimiento permite obtener sin dificultad las cargas equivalentes en los casos en que se reducen los grados de libertad de la estructura agrupando varios movimientos en uno sólo, sea por condiciones de simetría, de inextensibilidad, u otras.

De este modo la estructura queda representada por movimientos $\boldsymbol{U}$, y cargas $\boldsymbol{F}$ sobre los nudos, que responden a las deformaciones $\boldsymbol{u}$, y esfuerzos $\boldsymbol{f}$ correspondientes a los extremos de las barras, que permiten describir el comportamiento de éstas, mediante las ecuaciones de rigidez $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}$.

Bastará, por tanto establecer las ecuaciones de compatibilidad entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{U}$, a saber $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$, o las de equilibrio $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{f}$, para poder resolver el problema de la estructura por el procedimiento usual establecido en el apartado 2.11.

Como se ve, por tanto, establecer el modelo de la estructura exige:

- considerar el tipo de deformación y esfuerzo al que va a estar sometida cada una de las barras de la estructura, y establecer su correspondiente relación de rigidez $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}$;

- establecer los movimientos posibles de los nudos que conectan las distintas barras, y que son compatibles con las deformaciones de éstas. Dichos movimientos $\boldsymbol{U}$ —llamados grados de libertad de la estructura— implican las cargas a que puede suponerse está sometida la estructura, que deberán ser las que produzcan trabajo en cada uno de dichos movimientos;

- establecer las cargas $\boldsymbol{F}$ como cargas sobre los nudos mismos, si es preciso partiendo de las cargas aplicadas por las barras como acciones de empotramiento perfecto. El término de carga asociado a cada movimiento aislado será igual al trabajo de las cargas en el movimiento considerado con valor unidad;

- establecer sea las ecuaciones de compatibilidad $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$, que expresan los movimientos de extremo de barra en función de los de los nudos, sea las

ecuaciones de equilibrio $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{f}$, que determinan las acciones sobre los nudos a partir de las acciones de extremo de las barras.

Las anteriores operaciones son las necesarias y suficientes para definir un modelo de la estructura: a partir de aquí la determinación del comportamiento de ésta será puramente computacional.

3.2. Barras. Realidad y abstracción. Tipos y modelos

Hemos visto que para establecer un modelo de estructura es requisito previo definir modelos para las barras de que ésta se compone, así como para las uniones entre las mismas. Trataremos en esta sección de los modelos de barra, para referirnos a los modelos de nudos en la sección siguiente, aun cuando la decisión sobre el tipo de barra a considerar exige tener presente el tipo de unión con el que van a conectarse.

En el apartado 3.1.3 hemos visto los casos teóricos típicos de esfuerzos en barras, que podemos resumir ahora, para barras rectas de sección constante

- Esfuerzos normales, con $N = \frac{EA}{l} \upsilon_x$
- Esfuerzos de torsión, con $M_x = \frac{GI_t}{l} \theta_x$
- Esfuerzos de flexión, con

$$\begin{bmatrix} M_{yi} \\ M_{yd} \end{bmatrix} = \frac{EI_y}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{yi} \\ \theta_{yd} \end{bmatrix}, \text{ o}$$
$$\begin{bmatrix} M_{zi} \\ M_{zd} \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zd} \end{bmatrix},$$

  según sea el sentido de la flexión a considerar. Los cortantes se obtienen a partir de la variación de los momentos, por lo que no se consideran separadamente

Para los dos esfuerzos axiales, N y M_x se consideran como movimiento el desplazamiento, o rotación, relativo de un extremo respecto del otro. Para los esfuerzos de flexión, se consideran las rotaciones de los extremos —de la tangente a la barra en éstos— en relación a la línea que une ambos extremos, y en el plano de flexión considerado. Dichas deformaciones serán las responsables de equilibrar la carga según el tipo estructural considerado, de modo que bastará incluir en el modelo exclusivamente las relaciones precisas, que ahora repasamos.

En el caso de cerchas, de estructuras trianguladas, las uniones se consideran articulaciones pese a que usualmente se realizan de forma que pueden transmitirse momentos entre barras contiguas. Ahora bien, siempre que las cargas se apliquen a los nudos, y salvo en el caso de que los ejes de las distintas barras no concurran en el mismo punto en los nudos, en cuyo caso se generan momentos secundarios por las excentricidades de los esfuerzos axiales, o en el caso de que la triangulación sea incompleta en algún tramo —en cuyo caso la estructura puramente articulada sería un mecanismo— los momentos no son necesarios para el equilibrio, y los análisis que los tienen en cuenta revelan usualmente su muy escaso valor, que sólo dará lugar a plastificaciones locales cerca de los nudos sin

por ello reducir la carga de colapso. De este modo no se tienen en cuenta las flexiones en el análisis de este tipo de estructura incluyendo en el modelo sólo la elongación y el esfuerzo normal de la barra.

En el caso de que los esfuerzos cortantes o flectores sean necesarios para el equilibrio, es imprescindible considerar las relaciones entre momentos y giros de flexión en el plano correspondiente de la barra, que, usualmente es uno sólo de los planos de flexión de ésta: la flexión que implica movimientos verticales de la barra. No es usual requerir de la capacidad de flexión lateral de las barras, pues normalmente dicho movimiento lateral está coaccionado por elementos de mucha mayor rigidez, como son usualmente las losas de forjado que apoyan en dichas barras: en edificación sólo es preciso considerar el movimiento lateral en problemas de estabilidad —de pandeo— en estructura metálica, cuando el arriostramiento lateral dispuesto es escaso, y a los efectos de asegurar la estabilidad lateral local de la barra, o de alguno de sus cordones (en soluciones metálicas, el cordón inferior en zonas próximas a apoyos con continuidad, pues en ese caso el cordón inferior está comprimido y no queda arriostrado suficientemente por la losa o la siguiente familia de vigas que apoya en el cordón superior). Cuando la rigidez lateral de una viga que no está aislada es necesaria para la estabilidad de la estructura, suele ser útil y económico considerar cambios en el diseño de la misma que resuelvan el problema planteado sin recurrir a dicha rigidez.

Finalmente la rigidez en torsión es sólo necesaria en casos muy especiales, a menudo patológicos: efectivamente, la eficacia estructural en torsión es muy baja, como se verá más adelante, y la rigidez en torsión resulta por ende baja en relación con el resto, de modo que cuando existen medios alternativos a la torsión para equilibrar las cargas, las mayores rigideces para estos medios movilizan fracciones muy superiores a las que movilizan los mecanismos que requieren de torsiones, que sólo son imprescindibles cuando no existen medios alternativos para materializar el equilibrio. Una estructura tridimensional puede incluir en su modelo la rigidez en torsión de las barras, pero si las torsiones que aparecen en ellas son importantes, resultará siempre, bien de un error en el modelo —usual en los modelos tridimensionales que generan los programas de cálculo que parten de dibujos de estructuras, cuando la continuidad entre barras no queda bien descrita en el modelo— bien de un error en la concepción de la estructura. Por ello no es usual considerar las rigideces en torsión en la mayor parte de las estructuras de edificación usuales.

En relación con los términos de rigidez que aparecen en las expresiones teóricas, su sentido en soluciones metálicas es inequívoco, pero no es así en el caso de las soluciones de hormigón armado: en éstas es habitual realizar el análisis considerando las secciones brutas de hormigón, sin contabilizar las armaduras, aunque luego se estiman las deformaciones considerando las secciones fisuradas, lo que constituye un enorme contrasentido: los esfuerzos obtenidos corresponden a un modelo que no es consistente con el utilizado después para armar, y para determinar las deformaciones. Sin embargo los teoremas del análisis plástico que veremos en el capítulo 5 permiten asegurar que los armados obtenidos de este modo confieren a la estructura la seguridad necesaria, y por otro lado, en relación con las deformaciones, la incertidumbre en los límites asociados a los daños debidos a deformación excesiva es mayor que la inconsistencia apuntada para el modelo de análisis, por lo que es práctica habitual y recogida en la normativa aceptar la inconsistencia apuntada.

Un modelo que representaría con mayor consistencia la realidad en hormigón armado sería mantener en pilares la rigidez bruta considerada —puesto que al estar básicamente comprimidos tendrán escasa fisuración, de modo que la rigidez del hormigón es una buena aproximación a la rigidez del pilar— pero considerar en vigas la rigidez fisurada como aproximación mejor a ésta, dado que en vigas se espera que el acero trabaje en tracción en niveles de tensión que no son compatibles con la no fisuración del hormigón. Una muy buena aproximación a la rigidez $K = EI$ de las secciones de una viga es la expresión $K = 0,7\, E_s A_s d^2$ siendo E_s, A_s el módulo de rigidez y el área de acero y d el canto útil de la sección de referencia para la pieza considerada —el empotramiento en voladizos, y el centro del vano en todos los demás casos—

Esta última estrategia implica mayores momentos en los nudos, o mejor dicho, implica que una parte mayor de los momentos de extremo de la viga debe equilibrarse con momentos de extremo en los pilares, y por lo tanto con importante cambio de posición en la resultante de compresión a través del nudo, e incluso, cuando llega a aparecer una cara traccionada en el pilar, tracción que estará en caras opuestas a ambos lados del nudo, será necesario el cambio de sentido en las fuerzas del correspondiente par. Esto sólo será posible si el nudo es de dimensiones apropiadas, y si el armado en el nudo está definido adecuadamente en función de las fuerzas que conforman dicho equilibrio. Por ello, aun cuando la estrategia de emplear rigideces brutas en pilares y fisuradas en vigas puede resultar más consistente desde la perspectiva de las barras, puede no serlo tanto desde la perspectiva de los nudos, y de hecho es una estrategia de la que sólo conozco casos de empleo en problemas de investigación, ninguno en obras usuales de edificación.

3.3. Uniones. Tipos. Modelos.

Hemos visto que las barras quedan definidas por las relaciones entre movimientos y esfuerzos de extremo, de modo que la definición de los nudos se hará en general en relación con las coacciones que son capaces de imponer a las barras, o dicho con mayor precisión, en relación con los movimientos de las distintas barras cuya compatibilidad pueden imponer.

Como en cualquier otro elemento estructural, la discusión sobre las propiedades de la unión deberá versar sobre sus movimientos, sus esfuerzos internos, y la resistencia y rigidez que opone.

En el enfoque clásico adoptado para modelar las estructuras, las dimensiones finitas, y las consiguientes deformaciones de la unión, han sido ignoradas, atribuyéndose éstas a las barras que concurren en ella: el modelo de unión puntual exige barras cuyas longitudes son mayores que la luz libre, al ser la distancia entre nudos, definidos por los ejes o directrices de las barras. En modelos más sofisticados, como el del nudo *extenso*, las dimensiones de las barras siguen siendo mayores que la luz libre al ser la luz libre más, en cada extremo, al menos medio canto, o la distancia al eje de las barras que concurren al nudo, eligiendo la menor de dichas dimensiones.

De este modo podía despreciarse la deformación material interna al nudo físicamente finito, u analizar la unión considerando exclusivamente si la coacción aportada por la unión existe o no.

3.3.1. Uniones simples

Considerando las coacciones que impone la unión, y estableciendo que la coacción se produce completamente, o por el contrario que no se produce coacción en absoluto, podemos plantear la clasificación tradicional en tres tipos generales de *unión* o más bien de condición de extremo de barra, a saber

- libre, cuando no hay coacción de ningún tipo
- articulado, cuando sólo se impone la compatibilidad en los desplazamientos
- empotrado, cuando se impone la compatibilidad en desplazamientos y en giros.

La anterior *clasificación* —que puede con facilidad caricaturizarse comparándola a la clasificación de los animales del emperador según Borges— presupone tanto que la rigidez opuesta al movimiento que se coacciona es infinita, como que la resistencia aportada frente a los esfuerzos desarrollados es suficiente, no produciéndose fenómenos locales de plastificación. Pero aun aceptando dichos supuestos, puesto que los movimientos posibles del sólido indeformable —y por tanto los de un extremo de barra en relación al otro al que le conecta la unión— son seis, tres desplazamientos y tres rotaciones, la realidad es algo más compleja que la descrita por la anterior clasificación pudiendo también hablarse de

- apoyo en dilatación, (sólo se coacciona el desplazamiento vertical)
- articulación esférica (se liberan los tres giros)
- articulación cilíndrica (se libera sólo el giro en torno al eje del cilindro
- ...

y puede verse que el conjunto de combinaciones posibles es muy elevado (en términos estrictamente teóricos el número de opciones posibles sería de $2^6 = 64$). En el cuadro siguiente se indican movimientos y nombres a los que corresponden distintas condiciones usuales de coacción —denotadas por 1— o no coacción —denotadas por 0—

	υ_x	υ_y	υ_z	θ_x	θ_y	θ_z
extremo libre	0	0	0	0	0	0
apoyo	0	0	1	0	0	0
rótula esférica	1	1	1	0	0	0
rótula cilíndrica	1	1	1	1	1	0
empotramiento	1	1	1	1	1	1

Hay que tener presente que la definición de la unión responde siempre a la coacción aplicada. Una coacción completa implica una condición de compatibilidad conocida para una condición desconocida de esfuerzo interno a la unión, o de extremo de barra —reacción si la unión es de sustentación—. La coacción implica un movimiento relativo nulo entre las piezas que acometen al nudo. Por el contrario la libertad de movimiento o falta total de coacción implica el desconocimiento del movimiento producido —o del movimiento relativo entre los extremos de las barras consideradas— a cambio de conocerse el esfuerzo de interacción correspondiente, o esfuerzo interno a la *unión* que será nulo. Es decir

que para el conjunto de uniones definidas, de los dos términos de la interacción entre los dos elementos unidos —el movimiento relativo y el esfuerzo de interacción— se desconoce uno de ellos mientras que se puede asegurar el valor nulo del otro.

3.3.2. Uniones intermedias. El modelo de resorte. Uniones incompletas

Las uniones reales son de una complejidad bastante mayor aún que los modelos simples planteados que son, sin embargo, los más sencillos de modelar y en los que se basan los modelos clásicos empleados en estructuras.

Pues, efectivamente, pueden darse uniones con movimientos parcialmente coaccionados, como son las deslizantes con rozamiento. En este caso existe movimiento en la unión, pero no anula la fuerza opuesta a dicho movimiento, fuerza que depende de otra de las que conforman la interacción. Pueden igualmente establecerse formas que liguen unos movimientos con otros, como en el tornillo en el que el desplazamiento implica rotación simultánea. Pueden obtenerse en la unión condiciones de rigidez incompleta, por la que se coacciona sólo parcialmente el movimiento, con esfuerzos de interacción menores que los que exigiría la coacción completa.

En este caso son desconocidos los dos términos de la interacción. Por ello para definir suficientemente el problema estructural es preciso introducir una condición adicional que ligue,

- esfuerzos entre sí —en el rozamiento la relación entre la carga normal al apoyo y la tangencial al mismo—,
- movimientos entre sí —mediante condiciones de compatibilidad particulares a la geometría de la unión—,
- esfuerzos con movimientos, mediante condiciones que representen la rigidez del nudo.

Para el tercero de los casos pueden establecerse condiciones más complejas de unión mediante la consideración de los nudos como *resortes, o barras atípicas* con condiciones de rigidez cuya determinación requiere un conocimiento experimental previo sobre la unión, cuestión en la que se está trabajando en el caso de las estructuras metálicas, pero sobre la que hay poco conocimiento estabilizado. Dichos *resortes* estarán conectados con coacción completa a los extremos de las barras que conectan, y el modelo de la estructura se realizará en forma análoga sin más que considerar estas *barras o elementos* adicionales y emplear como movimientos libres de la estructura los distintos a cada lado de la unión.

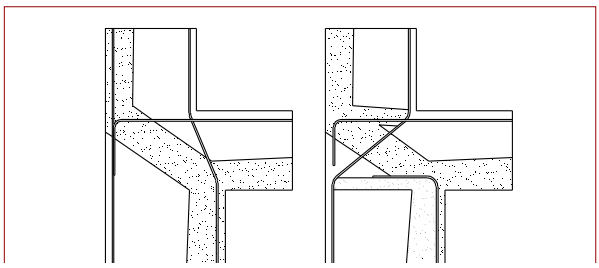
En la sección 3.3.3 se desarrolla a modo de ejemplo una doble estrategia para acometer el análisis con nudos de rigidez incompleta —*semirrígidos* en la nomenclatura generalizada por el Eurocódigo 3— mostrando cómo pueden incluirse las rigideces de los nudos en la formulación de la rigidez general de la barra, considerando el conjunto nudo–barra–nudo como una barra alterada de nuevo tipo cuya rigidez conjunta puede determinarse con las técnicas de análisis de las subestructuras, y que se incorpora de la forma habitual al modelo de la estructura.

Para el segundo de los casos presentados al principio de este apartado suele ser suficiente plantear adecuadamente las correspondientes condiciones de compatibilidad $\boldsymbol{B}$ —y por consiguiente las de equilibrio $\boldsymbol{B}^T$— estableciendo como movimiento libre de la estructura precisamente ese movimiento combinado.

Para el primero de los casos, lo que se obtiene como condición adicional a las ecuaciones de compatibilidad $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{BU}$, equilibrio $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{f}$ y rigidez $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{ku}$ es una ecuación que liga las componentes sea de $\boldsymbol{F}$, sea de $\boldsymbol{f}$, sea de unas con otras. Esto exige un tratamiento algo diferente que no abordamos aquí en forma general.

Un problema diferente se presenta en el caso en que la unión puede suponerse suficientemente rígida como para asegurar la coacción exigida entre los extremos de barra que conecta, por ser de comportamiento rígido en los primeros escalones de la carga, pero resulta incapaz de desarrollar resistencia suficiente para los esfuerzos de interacción resultantes en el análisis.

En este caso pueden emplearse las estrategias del análisis elástico —rechazar la unión y rediseñarla, rehaciendo el correspondiente análisis— o del análisis plástico —admitir plastificación parcial sin rotura de la unión— lo que exige rehacer el análisis desde el enfoque plástico para obtener esfuerzos equilibrados que no superen los de plastificación, comprobando la existencia de ductilidad suficiente en las secciones y uniones en las que se produce dicha plastificación. Puede en este caso atribuirse la plastificación, en vez de a la unión misma, al extremo de una o varias de las barras implicadas en la unión, empleando la estrategia clásica. Un ejemplo de este enfoque es el empleado en sus lecciones por el profesor D. José Luis de Miguel en el análisis de uniones a los pilares laterales de pórticos de hormigón armado, en los que el análisis del nudo revela la imposibilidad de desarrollar en él los esfuerzos de flexión y cortadura que exigen los momentos de extremo de viga obtenidos usualmente en el análisis clásicos de estos pórticos. Dicha imposibilidad viene dada por la rápida variación de tensiones en armaduras que se exigirían, imposibles de justificar con los modelos de rozamiento y de adherencia admitidos por las normas de hormigón. Su estrategia consiste en proponer como modelos de resistencia para el pilar diagramas de interacción momento–normal modificados respecto de los usuales, diagramas en los que las regiones de mucho momento con poca carga quedan definidas por las condiciones que cabe obtener en nudos, en extremos de los pilares, en lugar de definirlas a partir de las condiciones correspondientes a secciones aisladas del pilar.



La biela es posible sólo con pequeñas excentricidades. En caso contrario exige continuidad cruzada de la armadura de tracción.

Figura 3.7: Biela en nudo de hormigón

3.3.3. Nudos semirrígidos en estructuras metálicas

Para cerrar este apartado, vamos a considerar el caso de uniones de rigidez reducida. El Eurocódigo 3 se refiere a una unión semirrígida como aquella *que no cumple los requisitos de una unión rígida o una articulación, dados en los apartados correspondientes* en los que, de forma harto vaga en sus versiones iniciales definía las uniones articuladas como aquellas que no desarrollan momentos relevantes, y como rígidas aquellas en las que la flexibilidad de los nudos no supone pérdidas de resistencia en la estructura que superen el 5 % de la misma. Dicha definición se ha precisado más posteriormente, estableciendo ciertos límites en relación a la rigidez de la barra que se une, límites que dejan a una parte sustancial de las uniones habituales dentro del campo *semirrígido.*

El mismo Eurocódigo analiza la rigidez de ciertos nudos, estableciendo métodos de estimación para ésta, que oscilará entre cero —articulación— e infinito —unión rígida—

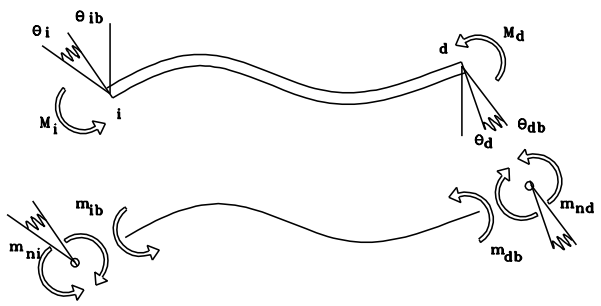


Figura 3.8: Modelo de viga con nudos semirrígidos

La propuesta de emplear explícitamente las rigideces de los nudos sugiere considerar como elemento de barra al conjunto formado por un modelo de resorte en cada uno de los nudos, más la barra situada entre ellos, y, empleando técnicas de condensación estática al modo utilizado para tratar con subestructuras, contruir un modelo de barra modificado que incluya las anteriores rigideces.

Realizamos como ejercicio el desarrollo de ese tipo de condensación. Establecemos para ello en primer lugar los parámetros relevantes para dicha formulación:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \theta_{ni} \\ \theta_{nd} \\ \theta_{ib} \\ \theta_{db} \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} m_{ni} \\ m_{nd} \\ m_{ib} \\ m_{db} \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \theta_{i} \\ \theta_{d} \\ \theta_{ib} \\ \theta_{db} \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} M_{i} \\ M_{d} \\ M_{ib} \\ M_{db} \end{bmatrix}$$

La compatibilidad $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{BU}$, y las rigideces de la relación $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{ku}$ resultan, sin más que observar la figura 3.8, en:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_{ni} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{nd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} .$$

Por sencillez de notación usaremos para los nudos la siguiente[10]:

$$k_{ni} = \kappa_i \frac{EI}{l};\ k_{nd} = \kappa_d \frac{EI}{l}. \tag{3.12}$$

De este modo la rigidez conjunta resulta ser, tras operar,

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{k} \boldsymbol{B} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \kappa_i & 0 & -\kappa_i & 0 \\ 0 & \kappa_d & 0 & -\kappa_d \\ -\kappa_i & 0 & \kappa_i + 4 & 2 \\ 0 & -\kappa_d & 2 & \kappa_d + 4 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, como el momento de un mismo nudo es único, resulta que visto desde el exterior, el momento de extremo de barra y el del nudo en contacto con ésta se equilibran entre sí, de modo que

$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \kappa_i & 0 & -\kappa_i & 0 \\ 0 & \kappa_d & 0 & -\kappa_d \\ -\kappa_i & 0 & \kappa_i + 4 & 2 \\ 0 & -\kappa_d & 2 & \kappa_d + 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \\ \theta_{ib} \\ \theta_{db} \end{bmatrix}$$

ecuación que permite determinar los giros de extremo de las barras en función de los de los nudos;

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa_i & 0 \\ 0 & -\kappa_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_i + 4 & 2 \\ 2 & \kappa_d + 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{ib} \\ \theta_{db} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{ib} \\ \theta_{db} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_i + 4 & 2 \\ 2 & \kappa_d + 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \kappa_i & 0 \\ 0 & \kappa_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix}$$

y por lo tanto obtener la relación de rigidez del conjunto nudos–barra:

$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_d \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \left(\begin{bmatrix} \kappa_i & 0 \\ 0 & \kappa_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\kappa_i & 0 \\ 0 & -\kappa_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_i + 4 & 2 \\ 2 & \kappa_d + 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \kappa_i & 0 \\ 0 & \kappa_d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix}$$

de donde resulta

$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_d \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \frac{1}{(12 + 4\kappa_i + 4\kappa_d + \kappa_i\kappa_d)} \begin{bmatrix} 4\kappa_i(3 + \kappa_d) & 2\kappa_i\kappa_d \\ 2\kappa_i\kappa_d & 4\kappa_d(3 + \kappa_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

que tiende a los conocidos límites para barras con nudos infinitamente rígidos, empotrados, o infinitamente flexibles, articulados.

Puede, mediante la misma estrategia, obtenerse asimismo los equivalentes a los momentos de empotramiento perfecto, es decir, los esfuerzos con que iniciar el análisis en el supuesto de no existencia de giro en el nudo, aunque los extremos de la barra sí girarán por efecto de la relajación que supone el nudo elástico.

Para este análisis suponemos aplicados por los extremos de la barra, y como carga correspondiente a la fase de empotramiento perfecto, los momentos de empotramiento de barra $-M_{ei}, M_{ed}$, de modo que

$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_d \\ -M_{ei} \\ M_{ed} \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \kappa_i & 0 & -\kappa_i & 0 \\ 0 & \kappa_d & 0 & -\kappa_d \\ -\kappa_i & 0 & \kappa_i + 4 & 2 \\ 0 & -\kappa_d & 2 & \kappa_d + 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{ib} \\ \theta_{db} \end{bmatrix}$$

[10] En las versiones más recientes del Eurocódigo y otras normas derivadas de éste como el CTE DB–SE–A o la EAE, el rango de los nudos semirrígidos corresponde a los valores de κ comprendidos entre 0,5 y 8 para estructuras arriostradas, y entre 0,5 y 25 para el caso de las no arriostradas.

con lo que

$$\begin{bmatrix}\theta_{ib}\\ \theta_{db}\end{bmatrix} = \frac{l}{EI}\begin{bmatrix}\kappa_i+4 & 2\\ 2 & \kappa_d+4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-M_{ei}\\ M_{ed}\end{bmatrix}$$

por lo que el *resorte* del nudo rotará reduciendo momentos, que se equilibrarán en los valores de empotramiento semirrígido, que podemos obtener al ser opuestos a las reacciones M_i y M_d en la misma expresión:

$$\begin{bmatrix}M_{si}\\ M_{sd}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}M_i\\ M_d\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}-\kappa_i & 0\\ 0 & -\kappa_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\kappa_i+4 & 2\\ 2 & \kappa_d+4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-M_{ei}\\ M_{ed}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}M_{si}\\ M_{sd}\end{bmatrix} = \frac{1}{12+4\kappa_i+4\kappa_d+\kappa_i\kappa_d}\begin{bmatrix}\kappa_i(4+\kappa_d) & -2\kappa_i\\ -2\kappa_d & \kappa_d(4+\kappa_i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-M_{ei}\\ M_{ed}\end{bmatrix} \tag{3.14}$$

expresión que tiende a mantener los valores de los momentos de empotramiento para rigideces infinitas, a anularlos para valores nulos, o a aumentar el momento en un nudo rígido en el valor de la mitad del momento del nudo que se relaja hasta aparecer como articulación, como se observa sin más que obtener los límites correspondientes. Por ejemplo haciendo tender a infinito la rigidez del nudo derecho tenemos

$$\lim_{\kappa_d\to\infty}\left(\frac{1}{12+4\kappa_i+4\kappa_d+\kappa_i\kappa_d}\begin{bmatrix}\kappa_i(4+\kappa_d) & -2\kappa_i\\ -2\kappa_d & \kappa_d(4+\kappa_i)\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\frac{\kappa_i}{\kappa_i+4} & 0\\ \frac{-2}{\kappa_i+4} & 1\end{bmatrix}$$

Podemos plantear las relaciones de rigidez anteriores de forma más intuitiva si, en lugar de hablar de la rigidez del nudo, hablamos de *grado de empotramiento* de la barra, que se hará igual a uno si el nudo es infinitamente rígido, y se anulará para nudos articulados. Se trata de un concepto relativo más sencillo de manejar, aun cuando su formulación rigurosa requerirá referirlo a relaciones entre la rigidez del nudo y la de la barra[11].

Para establecer de forma rigurosa este concepto podemos definirlo como el cociente entre el momento de empotramiento de la barra unida a un nudo semirrígido, siendo rígido el otro nudo, y el momento de empotramiento perfecto de la barra, para el caso de ser ambos nudos rígidos, es decir

$$g_i = \frac{M_{si}}{M_{ei}} \quad \text{cuando } \kappa_d \to \infty$$

de modo que,

$$g_i = \frac{\kappa_i}{\kappa_i+4}; \quad g_d = \frac{\kappa_d}{\kappa_d+4}$$
$$\kappa_i = \frac{4g_i}{1-g_i}; \quad \kappa_d = \frac{4g_d}{1-g_d}$$

resultando que las relaciones de rigidez en función de los valores del *grado de empotramiento* propuesto, son

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{u} \quad \text{con } \boldsymbol{k} = \frac{EI}{l}\frac{1}{3+g_i+g_d-g_ig_d}\begin{bmatrix}4g_i(3+g_d) & 8g_ig_d\\ 8g_ig_d & 4g_d(3+g_i)\end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Podemos establecer una pequeña tabla comparativa de valores para los coeficientes de la matriz de rigidez:

[11] Una acepción para el término que ha sido usual en la normativa clásica, empleada en estimaciones de rigideces aplicables en pandeo de pilares en pórticos de nudos rígidos, y aplicada, por tanto a la coacción que el conjunto de barras que concurren en un nudo ejerce sobre una barra dada, ha sido la relación que se obtiene dividiendo el cociente entre inercia y luz de la barra por la suma de cocientes de inercia a luz acumulada en el nudo.

$\boldsymbol{k}l/EI$	$g_i = 0$		1/2		1	
$g_d = 0$	0	0	12/7	0	3	0
	0	0	0	0	0	0
1/2	0	0	25/15	8/15	7/2	1
	0	12/7	8/15	25/15	1	2
1	0	0	2	1	4	2
	0	3	1	7/2	2	4

Fnalmente, las relaciones $\boldsymbol{k}_e$ que determinan los momentos de empotramiento semirrígido en función de los momentos de empotramiento perfecto son, por el mismo procedimiento que antes:

$$\begin{bmatrix} M_{si} \\ M_{sd} \end{bmatrix} = \frac{1}{3 + g_i + g_d - g_i g_d} \begin{bmatrix} 4g_i & 2g_i g_d - 2g_i \\ 2g_i g_d - 2g_d & 4g_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{ei} \\ M_{ed} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Podemos igualmente aportar una tabla resumen de los factores que determinan el momento de empotramiento semirrígido en ambos nudos en proporción al valor del de empotramiento perfecto para carga simétrica, y en función de los valores, sean simétricos o no, de los grados de empotramiento en ambos nudos:

$\boldsymbol{k}_e$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$g_i = 0$	1/2	1
$g_d = 0$	0	6/7	3/2
	0	0	0
1/2	0	2/3	5/4
	−6/7	−2/3	−1/2
1	0	1/2	1
	−3/2	−5/4	−1

En cualquier caso, la aplicación de éste u otro enfoque al problema requiere de la existencia de amplia información experimental —o analítica basada en modelos rigurosos realizados por elementos finitos— aún por elaborar y difundir.

3.4. Elementos superficiales típicos.

Al igual que pueden establecerse las relaciones de equilibrio, compatibilidad y de rigidez de los elementos lineales, puede hacerse para elementos superficiales, con la dificultad de que el conjunto de variables a considerar aumenta, al tener que emplearse dos familias de cortes para aislar trozos elementales, por un lado, y al resultar más compleja la definición de los elementos de tamaño finito, que ahora no quedan limitados por dos puntos y definidos por una línea, sino que aumentan en una dimensión, debiendo delimitarse por líneas cerradas y describirse mediante superficies. Los tipos más evidentes, cuyo análisis dejamos para textos especializados, son

Lajas. Elementos planos sometidos a cargas y esfuerzos contenidos en su plano, como las vigas–pared.

Losas. Elementos planos sometidos a cargas y esfuerzos —de flexión— transversales a su plano.

Membranas. Elementos curvos sometidos a cargas transversales a la superficie, pero que son equilibrados mediante esfuerzos exclusivamente contenidos en ella.

Láminas. Elementos curvos sometidos a cargas transversales equilibrados mediante esfuerzos que combinan los de membrana, y los de flexión de losas

El comportamiento superficial será relevante cuando se distinga de un conjunto paralelo de comportamientos lineales. En el caso de las losas, por ejemplo, esto sólo se da si las distancias a los apoyos son comparables en dos direcciones ortogonales, pues, en caso contrario, la losa se comporta como una familia de vigas en paralelo, adoptando una deformada cilíndrica que en nada se distingue de las de las vigas originales[12].

[12]En puridad hay una distinción de pequeña importancia en materiales con módulo de Poisson no nulo, pues las vigas estarían sometidas a un estado de tensión plana, mientras que las losas lo estarían a uno de deformación plana. Sin embargo dicha distinción, relevante en elasticidad, es irrelevante en la vida diaria.

Capítulo 4

Análisis basados en el equilibrio elástico

En el presente capítulo desarrollamos el análisis de estructuras de barras cualesquiera empleando las formulaciones obtenidas en los anteriores. Los ejemplos que se desarrollan permiten hacerse una clara idea de los métodos, que se desarrollan en un formato lo más sencillo posible, al objeto de poderse aplicar con medios electrónicos básicos, a saber, con calculadoras manuales dotadas de rutinas de operación con matrices, o con programas de hoja de cálculo, que, en las versiones más actuales incorporan funciones que permiten igualmente operar con matrices. El formato empleado permite además mantener la claridad en el tratamiento del conjunto de condiciones requeridas para resolver los problemas abordados —equilibrio, compatibilidad y rigidez—.

4.1. Métodos de análisis matricial

4.1.1. Introducción

Hemos visto que las ecuaciones lineales que ligan esfuerzos con cargas —de equilibrio— deformaciones con movimientos —de deformación— y esfuerzos con deformaciones —de rigidez o constitutivas— constituyen un conjunto suficiente para resolver los problemas elásticos. A lo largo de la historia, el proceso de depuración en la formulación de dichas ecuaciones —en el formato adoptado para plantearlas y resolverlas— ha llevado a muchas versiones.

En el caso de los problemas isostáticos, las formulaciones resultan de extremada sencillez, dado que bastan las ecuaciones de equilibrio. En estos problemas, los métodos gráficos han sido una herramienta central de análisis durante mucho tiempo, que fue dejada de lado con la progresión en la precisión de los métodos numéricos, pero que vuelven a resultar de plena actualidad e idoneidad al alcanzarse análoga precisión en los dibujos realizados con auxilio de los ordenadores y las herramientas de CAD. Donde la solución puede obtenerse gráficamente, el proceso resulta en general más rápido y comprensible.

Sin embargo, en los problemas hiperestáticos, la necesidad de trabajar con los tres grupos de ecuaciones, y la inexistencia de construcciones gráficas adecuadas y generales, ha supuesto a lo largo de la historia que la tarea de exploración

de vías alternativas para la formulación de la solución haya sido extensa, dando lugar a soluciones diversas adaptadas mejor o peor a clases dadas de problemas. Las alternativas de considerar como variables descriptoras del problema, sea las fuerzas hiperestáticas internas en la estructura —las fuerzas redundantes que exceden las determinables por equilibrio— sea los desplazamientos de la estructura, y reescribir todas las ecuaciones en base a éstas, resolviéndo posteriormente los sistemas resultantes, ha dado lugar a versiones diversas de los llamados métodos de las fuerzas, o de los desplazamientos.

En el primero de ellos se desconecta la estructura de las condiciones redundantes, sustituyéndolas por las correspondientes fuerzas incógnita, y se establecen los movimientos asociados a las cargas y a cada fuerza (redundante) unidad —flexibilidades de la estructura— empleando para ello las ecuaciones de equilibrio (lo que es posible al considerarse sólo una de las fuerzas redundantes por vez) y de rigidez. Dada la linealidad, los movimientos de las fuerzas redundantes reales serán proporcionales a los obtenidos para la fuerza unidad. El problema se resuelve estableciendo las condiciones de compatibilidad que aseguren la conexión de la estructura: puede establecerse una ecuación de compatibilidad por cada conexión, ecuación que puede asociarse a la correspondiente fuerza incógnita, obteniéndose tantas ecuaciones como incógnitas. Este método, al tratar con el mínimo número de ecuaciones simultáneas, ha sido el preferido en épocas en las que las herramientas de cálculo numérico se reducían a la regla de cálculo.

En el segundo enfoque, se establecen como incógnitas todos los desplazamientos *libres* de la estructura, y se determinan las fuerzas en ésta asociadas a cada desplazamiento unidad considerado aisladamente, empleando las ecuaciones de compatibilidad y rigidez. Los desplazamientos distintos de la unidad darán fuerzas proporcionales a los primeros, y asimismo, las combinaciones de desplazamientos darán lugar a esfuerzos fruto de la combinación lineal de los de los desplazamientos aislados implicados. El problema se resuelve estableciendo el equilibrio correspondiente a las cargas y los esfuerzos derivados de los desplazamientos incógnita, habiendo tantas ecuaciones como desplazamientos libres. Dada su generalidad y abstracción éste es el enfoque preferido desde la aparición de los instrumentos electrónicos de cálculo.

Vamos a considerar una versión particular de este método general, de extremada utilidad si se dispone de medios que permitan realizar operaciones con matrices. La razón es sencilla: las formulaciones matriciales permiten empaquetar conjuntos de ecuaciones en objetos de cierto tamaño, con el mismo grado de abtracción para todos los problemas, de modo que establecida una cierta mecánica operativa, cualquier problema puede resolverse. Si el problema es de pequeño tamaño —número de desplazamientos independientes— puede resolverse manualmente con calculadora con mucha sencillez.

Vamos por tanto a presentar, mediante ejemplos, la forma de operar en problemas típicos hiperestáticos, con recurso a pequeñas calculadoras capaces de trasponer, multiplicar, e invertir matrices.

Para ello consideraremos sucesivamente las ecuaciones de equilibrio, las de compatibilidad —que veremos en detalle cómo se corresponden con las de equilibrio en virtud de la dualidad establecida en el apartado 2.9.1—, finalmente las de rigidez, resolviendo posteriormente los sistemas resultantes.

4.1.2. Equilibrio acciones–solicitaciones.

Vamos a estudiar en primer lugar varios casos clásicos del equilibrio entre acciones $\boldsymbol{F}$ y solicitaciones $\boldsymbol{f}$, que constituye la forma más extendida de considerar los requisitos de equilibrio, y que incluye, de hecho, al equilibrio entre acciones y reacciones sin más que considerar que las reacciones pueden representarse a partir de las solicitaciones de extremo de las piezas de sustentación.

En el apartado 4.1.3 analizaremos las condiciones de compatibilidad en dichos casos, resolviendo los correspondientes problemas en 4.1.5 siguiendo las directrices establecidas en el apartado 2.11.

Viga continua

Sea en primer lugar la viga continua de tres tramos y cuatro apoyos de la figura 4.1, página 79. Suponemos cargados los nudos con momentos. El equilibrio exige que las solicitaciones de extremo de las barras equilibren los momentos ejercidos sobre los nudos.

Para asegurar en el futuro criterios consistentes en los signos, elegiremos signos positivos para sentidos prefijados de fuerzas y momentos. En general los sentidos positivos de las fuerzas son los de los ejes crecientes, y los de los momentos las rotaciones de sentido antihorario —o, en tres dimensiones las que en torno al eje Z llevan el X al Y o en torno al eje X rotan el Y al Z, o en torno al Y llevan el Z al X—. Además emplearemos como representación de las solicitaciones sobre una región de la estructura las fuerzas que el resto de la estructura ejerce sobre la misma[1].

Puesto que en el problema que estamos considerando los equilibrios se producen por rotación de los nudos sobre los apoyos, los equilibrios a considerar son los que corresponden a dichos movimientos, y por tanto analizaremos el equilibrio de momentos en los nudos que están sobre dichos apoyos.

Representamos los momentos acción sobre los nudos mediante el vector

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

y representamos igualmente las solicitaciones tal como las hemos definido, es decir los momentos sobre los extremos de las vigas que componen cada tramo de

[1] Una interesante alternativa sugerida por Mariano Vázquez en sus notas a mi borrador consiste en usar para las variables *internas* los esfuerzos internos existentes en los extremos y no las fuerzas de extremo, por lo que los signos positivos corresponderían a los momentos con tracciones en la cara inferior (o derecha) de la viga, siendo por ello de igual signo ambos momentos de extremo de una barra sometida a flexión uniforme y con momentos opuestos *sobre* ambos extremos y en equilibrio. Esto hace que, por consistencia, los giros de extremo positivos correspondan a los que llevan la región contigua de la viga hacia abajo (o a la derecha) y por tanto a rotaciones opuestas en ambos extremos, lo que exige una matriz de rigidez modificada

$$\boldsymbol{k} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

. Otra alternativa tal vez mejor aún, puestos a cambiar el formato de esta última matriz, sería descomponer los valores de extremo entre las componentes simétrica y antimétrica tal como se sugiere en nota al pie de la página 32.

la viga continua mediante uno cualquiera de los dos vectores columna siguientes:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{33} \\ m_{34} \end{bmatrix} ; \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{31} \\ m_{32} \end{bmatrix} .$$

Nótese que en las listas anteriores las acciones contienen un subíndice que designa el nudo correspondiente, mientras que las solicitaciones contienen dos subíndices: el primero designa el tramo o la barra que se considera, y el segundo el nudo a que corresponde el extremo considerado. En la primera de las listas anteriores se ha designado el nudo con idéntica denominación que para las acciones —el número de nudo según la numeración general de nudos en la estructura analizada— aunque lo usual es más bien numerar los nudos de cada barra desde la perspectiva de la barra misma, como en la segunda de las listas, resultando por tanto un vector columna en el que el segundo subídice designa el extremo izquierdo o derecho —inferior o superior, etc.— de cada tramo, y establecer la correspondencia entre ambas numeraciones —la propia de la barra, y la de la estructura— en el momento en que sea preciso en el análisis.

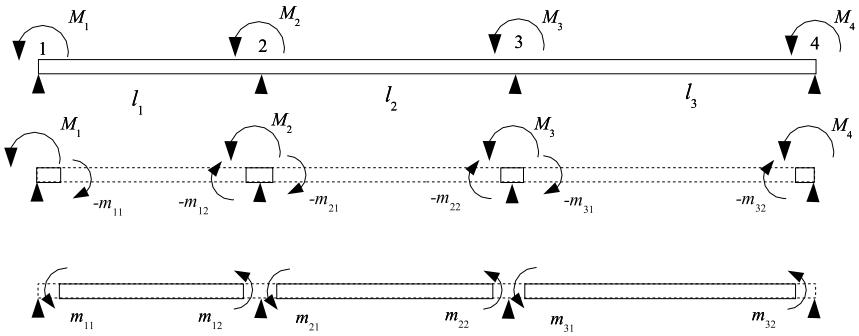


Figura 4.1: Equilibrio en viga continua

Así las cosas, las ecuaciones de equilibrio que pueden formularse correspondiendo a cada movimiento desconocido de la estructura serán

$$\begin{aligned} M_1 - m_{11} &= 0 \\ M_2 - (m_{12} + m_{21}) &= 0 \\ M_3 - (m_{22} + m_{31}) &= 0 \\ M_4 - m_{32} &= 0 \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} M_1 &= m_{11} \\ M_2 &= m_{12} + m_{21} \\ M_3 &= m_{22} + m_{31} \\ M_4 &= m_{32} \end{aligned}$$

si bien una expresión equivalente con más interés desde nuestro punto de vista es la siguiente, en formato matricial

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{31} \\ m_{32} \end{bmatrix}$$

La anterior expresión resulta trivial de construir en la forma matricial —que responde al ya conocido formato $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}$— a partir de las consideraciones del equilibrio de los nudos. Efectivamente, interpretando las reglas de la multiplicación matricial, podemos ver que cada fila de la matriz corresponde a cada una de las ecuaciones de equilibrio que pueden establecerse en la estructura, mientras que cada columna aporta el factor con el que cada solicitación de extremo participa en el equilibrio en dichas ecuaciones.

Estructura de cables

Podemos considerar ahora el equilibrio de la estructura de cables de la figura 4.2. Pueden plantearse las condiciones de equilibrio en el nudo libre —no sustentado— resultando

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1x} & \alpha_{2x} & \alpha_{3x} \\ \alpha_{1z} & \alpha_{2z} & \alpha_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

ecuaciones en las que α_{ni} representa el coseno del ángulo que la barra n —orientada desde su extremo libre hacia el otro— forma con la dirección i.

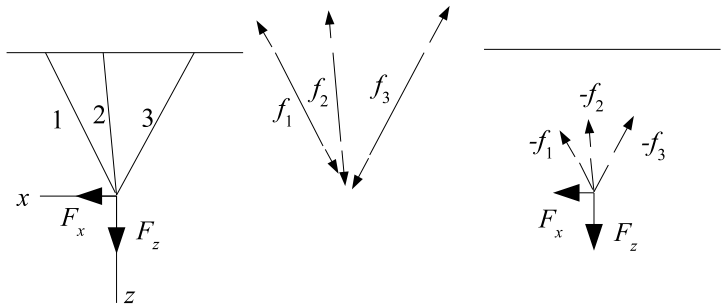


Figura 4.2: Equilibrio en estructura de cables

Pórtico simple

Veamos finalmente un pórtico simple sometido a carga horizontal, como el de la figura, en el que numeramos los pilares izquierdo y derecho y el tablero sucesivamente ...

Para el análisis de dicho pórtico consideramos los equilibrios correspondientes a cada movimiento posible.

Supondremos, como es usual a menudo, que los alargamientos o acortamientos son despreciables en magnitud frente a los movimientos por flexión. De este modo los movimientos posibles son el desplazamiento del tablero superior, y los giros de los dos nudos del pórtico.

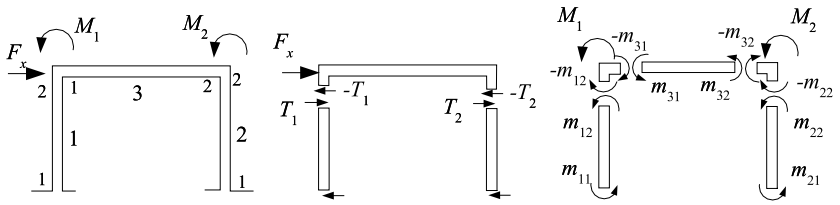


Figura 4.3: Pórtico simple

Estableceremos, pues, el equilibrio correspondiente a dichos movimientos. El desplazamiento del tablero está asociado al equilibrio de fuerzas horizontales, a saber, la carga sobre el pórtico y los cortantes de los pilares

$$F_x = T_1 + T_2$$

Ahora bien, en estructuras de barras en flexión es imperativo determinar los cortantes a partir del equilibrio de momentos de las barras, salvo que se considere la deformación de la barra por distorsión angular, que no es lo habitual, por lo que $T_1 = (m_{11} + m_{12})/h$; $T_2 = (m_{21} + m_{22})/h$. De modo que

$$F_x = (m_{11} + m_{12})/h + (m_{21} + m_{22})/h$$

Por otro lado los equilibrios de momento en los nudos pueden establecerse con facilidad de igual forma que en el caso de la viga continua considerada anteriormente, siendo iguales a la suma de los momentos de extremo de las barras que acomenten al nudo. De este modo

$$\begin{bmatrix} F_x \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{31} \\ m_{32} \end{bmatrix}$$

4.1.3. Compatibilidad movimientos-deformaciones

Vamos a establecer ahora, para los mismos casos que en el anterior apartado, las condiciones de compatibilidad entre los desplazamientos $\boldsymbol{U}$ de la estructura considerada en su conjunto, y las *deformaciones* internas $\boldsymbol{u}$ de las barras de dichas estructuras, descritas en términos de los movimientos de sus estremos.

Compatibilidad en una viga continua

Retomando el primer ejemplo del apartado 2.2, establecemos como movimientos representativos de la estructura los giros de cada uno de los nudos

libres de ésta, a saber

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

considerando signos positivos para desplazamientos y giros los correspondientes a criterios idénticos a los ya empleados para fuerzas y momentos.

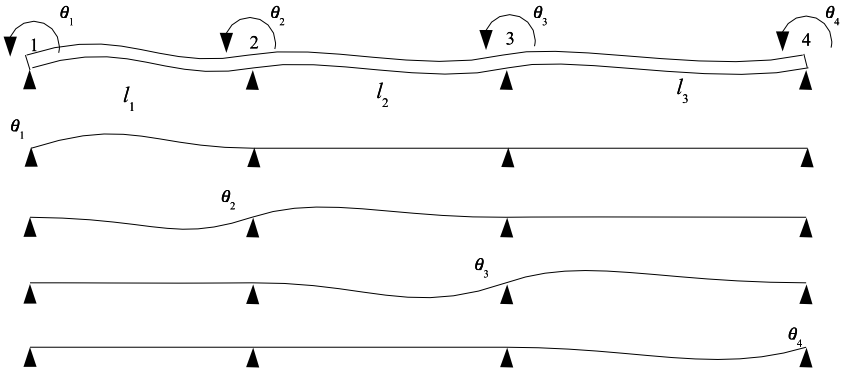


Figura 4.4: Compatibilidad en viga continua

Para representar las deformaciones emplearemos los movimientos de extremo de las barras que conforman la viga continua, movimientos a partir de los cuales es posible reconstruir la deformada de la barra completa. Puesto que estamos considerando una estructura cuya forma característica de trabajo es la flexión, los movimientos de extremo relevantes serán los giros de los nudos relativos a la posición de la barra, definida por la línea que une sus dos extremos, de modo que el conjunto de deformaciones de las piezas de la estructura queda representado por el conjunto de rotaciones de extremo de las barras que forman la viga. Usando los mismos criterios que hemos empleado con los esfuerzos internos para establecer los subíndices,

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \theta_{21} \\ \theta_{22} \\ \theta_{31} \\ \theta_{32} \end{bmatrix}$$

La compatibilidad exige en este caso identificar los giros de cada extremo de cada barra con los giros de los nudos conexos a ellas. Usando el formato matricial para las ecuaciones resultantes tenemos

$$\begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \theta_{21} \\ \theta_{22} \\ \theta_{31} \\ \theta_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

ecuación que puede representarse en la forma $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{BU}$. En dicha ecuación, las filas de la matriz de compatibilidad $\boldsymbol{B}$ representan la influencia de los movimientos de la estructura en cada uno de los movimientos de extremo de sus barras. Cada una de las columnas representa el efecto individualizado de cada uno de los movimientos de la estructura, considerado aisladamente.

Hay que señalar nuevamente que en esta representación hemos empleado la estrategia descrita de considerar como desplazamientos de la estructura los movimientos que constituyen el dual energético de las acciones sobre la estructura consideradas en el apartado 2.2, y que los hemos ordenado de la misma forma para asegurar sentido físico a la expresión del producto escalar. Hemos considerado, igualmente, como movimientos de extremo representativos de las deformaciones los duales energéticos de los esfuerzos de extremo de dicho apartado. En estas condiciones podemos observar ahora que las matrices $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$ son cada una la traspuesta de la otra. En el apartado 2.9 vimos que ésta es una condición general en cualquier formulación consistente de las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad.

Estructura de cables

El segundo ejemplo del apartado 2.2 puede formularse con análoga estrategia: las ecuaciones de compatibilidad se formulan determinando los alargamientos de las barras provocados por cada movimiento aislado de los nudos libres de la estructura.

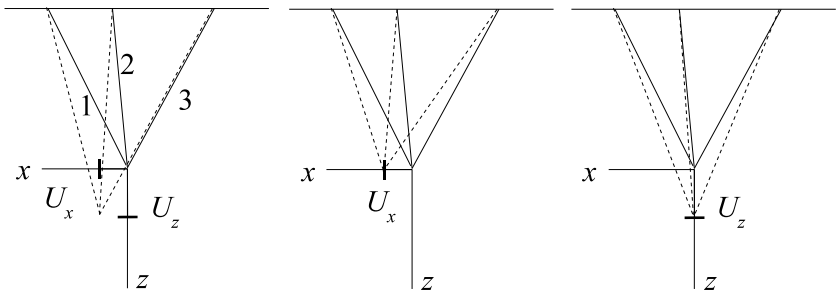


Figura 4.5: Compatibilidad en estructura de cables

Al igual que en el caso anterior, suponemos como signos positivos para los desplazamientos de nudos de la estructura los que fueron así considerados para las fuerzas. Para los esfuerzos internos, si la de tracción era positiva, ahora lo será el alargamiento.

De este modo, tal como se ve en la figura, podemos establecer

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1x} & \alpha_{1z} \\ \alpha_{2x} & \alpha_{2z} \\ \alpha_{3x} & \alpha_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_z \end{bmatrix},$$

ecuación que nuevamente puede representarse en el formato $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{BU}$.

Pórtico simple

Aplicando los mismos criterios que en los ejemplos anteriores, debemos, en éste, establecer como movimientos de la estructura el desplazamiento horizontal del tablero, y los giros de los nudos superiores. Asimismo, los movimientos de extremo de barras a considerar no son otros que los giros de extremo en éstas, medidos en relación a la línea que une ambos extremos.

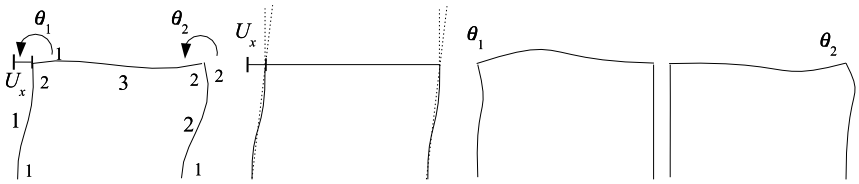


Figura 4.6: Compatibilidad en pórtico simple

Para considerar las ecuaciones de compatibilidad bastará considerar uno por uno cada movimiento libre, y anotar el movimiento de extremo de barra que éste provoca en cada pieza. En el caso del desplazamiento horizontal del tablero es fácil ver que, al desplazarse los nudos superiores de los pilares, la directriz se inclina un ángulo $\theta = \frac{1}{h}U_x$ y, al considerar este desplazamiento como único movimiento, sin, por lo tanto, rotaciones de los nudos, la orientación de los extremos de los pilares con respecto a la directriz cambia en el mismo ángulo. De este modo, y añadiendo al efecto del desplazamiento los de cada una de las dos rotaciones de los nudos de la estructura, resulta la ecuación de compatibilidad

$$\begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \theta_{21} \\ \theta_{22} \\ \theta_{31} \\ \theta_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & 1 & 0 \\ \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Vemos por tanto que la ecuación obtenida, que responde al formato $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{BU}$, mantiene la propiedad —general— de que $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}^T$, es decir, que la matriz de equilibrio $\boldsymbol{H}$ es la traspuesta de la matriz de compatibilidad $\boldsymbol{B}$. Esta propiedad permite elegir como medio para plantear las ecuaciones relevantes del problema, bien las del equilibrio, bien las de la compatibilidad, generando automáticamente las duales o, mejor aún, verificar la congruencia del modelo de análisis planteado mediante la verificación de la propiedad, como ya se apuntaba en el apartado 2.9.

4.1.4. Ecuaciones de rigidez esfuerzos-deformaciones

Planteamos ahora las condiciones de admisibilidad material que, en la fase de comportamiento elástico de la estructura se plantean en forma de relaciones entre las deformaciones $\boldsymbol{u}$ y los esfuerzos internos $\boldsymbol{f}$.

Viga continua

La rigidez de las barras de la estructura se apila en la forma descrita en el apartado 2.6 , de modo que $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{ku}$ se obtiene ahora con

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{l_1} & \frac{2EI_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI_1}{l_1} & \frac{4EI_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI_2}{l_2} & \frac{2EI_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2EI_2}{l_2} & \frac{4EI_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{l_3} & \frac{2EI_3}{l_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{l_3} & \frac{4EI_3}{l_3} \end{bmatrix}$$

Estructura de cables

Análogamente al caso precedente, basta apilar las matrices de todas las barras que forman la estructura, de modo que

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_3}{l_3} \end{bmatrix}$$

Pórtico simple

La técnica es siempre la misma

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{l_1} & \frac{2EI_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI_1}{l_1} & \frac{4EI_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI_2}{l_2} & \frac{2EI_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2EI_2}{l_2} & \frac{4EI_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{l_3} & \frac{2EI_3}{l_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{l_3} & \frac{4EI_3}{l_3} \end{bmatrix}$$

4.1.5. Solución de los problemas elásticos

La solución a los problemas planteados es ahora inmediata: en todos ellos hemos construido los tres grupos de ecuaciones a los que nos estamos refiriendo repetidamente

equilibrio $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{f}$

compatibilidad $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{BU}$

rigidez $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{ku}$

ecuaciones en las que los coeficientes $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{k}$ son conocidos, en las que las cargas $\boldsymbol{F}$ también lo son, y en las que se desconoce el resto de variables: los movimientos $\boldsymbol{U}$, las deformaciones o movimientos de extremo $\boldsymbol{u}$, y los esfuerzos de extremo de las barras, $\boldsymbol{f}$.

Ahora bien, las ecuaciones obtenidas permiten realizar la secuencia de operaciones establecidas en el apartado 2.11 que permiten resolver el problema, pues una vez presentado el problema en el formato

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{KU}, \quad \text{siendo} \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{kB} \tag{4.1}$$

la secuencia siguiente permite determinar sucesivamente todas las incógnitas del problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U} &= \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{f} &= \boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{F} \end{aligned} \tag{4.2}$$

El procedimiento resulta a todas luces abordable con herramientas de cálculo adecuadas, proporcionando de este modo un método completamente general para la solución de los problemas elásticos. Si los parámetros del problema están definidos en términos algebraicos (l, EI, etc.) las herramientas precisas serán programas de ordenador con capacidad para álgebra simbólica, como Mathematica, Maple o MuPAD, ... mientras que si los parámetros están fijados numéricamente ($l = 5$ m, $EI = 25000$ m^{2}KN, ...) las herramientas adecuadas sólo exigen la operación con matrices de números por lo que bastarán calculadoras matriciales, hojas de cálculo, o herramientas análogas.

Se deja como ejercicio al lector la solución de los problemas presentados en los apartados anteriores. Las soluciones a dichos problemas están al final de este texto, para los datos siguientes:

- viga continua: $l_1 = 5$ m, $l_2 = 5$ m, $l_3 = 6$ m; carga repartida $q = 30$ kN/m y sección constante.
- estructura de cables: cables de igual sección, con ángulos con la vertical de 30°, 0° y −40°.
- pórtico de altura $h = 3$ m, luz $l = 5$ m, perfiles de doble inercia en vigas que en pilares, carga horizontal $F = 10$ kN y carga repartida sobre la viga $q = 10$ kN/m.

4.2. Introducción al método de los elementos finitos

Los problemas continuos difieren de los considerados previamente en este capítulo en el sentido de que los conjuntos de ecuaciones de que disponemos para su formulación son ecuaciones que ligan funciones de punto, y no ecuaciones que ligan valores de variables. Hasta aquí hemos expresado sistemáticamente las ecuaciones con idéntico simbolismo, si bien sólo hemos procedido a la solución de problemas concretos en los casos de estructuras de barras en los que, previamente, habíamos reducido el problema del continuo en la barra al problema discreto de los esfuerzos y movimientos de extremo de dicha barra.

Antes de seguir se impone una precisión terminológica que facilite la comprensión de las expresiones abreviadas que vamos a emplear en lo sucesivo. La simbología a emplear cuando establezcamos expresiones de tipo genérico será la siguiente

- Utilizaremos sistemáticamente la negrita como hemos venido haciendo hasta ahora para designar objetos con varias componentes —vectores o matrices, como en el caso de las coordenadas de un punto, o las relaciones

de rigidez— y mantendremos la tipografía normal para objetos de una sola componente, como es el caso del descenso de un punto genérico de la elástica.

- Emplearemos letras romanas para designar valores discretos como son los momentos de extremo de una viga. Las más repetidas son las ya utilizadas $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{U}$ para designar deformaciones y movimientos, $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{F}$ para designar esfuerzos y cargas, y $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{K}$ para designar las rigideces, barra a barra, o combinada de la estructura. Puede verse que las minúsculas se refieren a los elementos, barras,... mientras que las mayúsculas se refieren a la estructura completa.

- Utilizaremos letras griegas para designar las funciones que describen valores continuos a lo largo de un cierto dominio. Nuevamente, y ordenando con el mismo criterio que en el punto anterior, utilizaremos de forma sistemática $\boldsymbol{\epsilon}$ y $\boldsymbol{\upsilon}$ para expresar deformaciones y desplazamientos, $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\tau}$ para designar esfuerzos y cargas, y $\boldsymbol{\kappa}$ para designar las funciones que definen las relaciones locales y distribuidas de rigidez entre deformaciones y esfuerzos —las llamadas ecuaciones constitutivas si el modelo considerado es el de la deformación elástica del punto material— Nótese que al contrario que con las funciones de cargas–esfuerzos y movimientos–deformaciones ahora no cabe emplear una expresión funcional para la rigidez completa —externa— de la estructura sino sólo de las condiciones constitutivas locales —internas—. Todas las funciones definidas son usualmentes de varias componentes, y de ahí su escritura en negrita.

Volviendo al tema presentado, al tratar de expresar relaciones útiles en las barras establecíamos por un lado los **movimientos** relevantes de la directriz de la pieza —de cada punto situado en la directriz— definidos por la función $\boldsymbol{\upsilon} \equiv z$, a los que asociábamos las **cargas** o acciones aplicadas sobre la viga, identificadas con cargas verticales distribuidas definidas por la función $\boldsymbol{\tau} \equiv q$; definíamos igualmente las **deformaciones** provocadas por dicho movimiento que eran relevantes para establecer el comportamiento de la viga, que identificábamos por la curvatura, definida a lo largo de la viga por la función $\boldsymbol{\epsilon} \equiv c$, y establecíamos los **esfuerzos** correlativos a dichas deformaciones, a saber, los momentos flectores, definidos por la función $\boldsymbol{\sigma} \equiv M$.

Abordando otros modelos de comportamiento estructural, si pensamos en el punto material de una estructura elástica cualquiera tendríamos ahora que $\boldsymbol{\upsilon}$ y $\boldsymbol{\tau}$, es decir los movimientos y las cargas, son las tres componentes del desplazamiento del punto y las tres componentes de la carga sobre éste —sean sobre los puntos de la masa interior, sean sobre los puntos de la superficie que cierra la estructura—, mientras que $\boldsymbol{\epsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ estarían formados con las componentes de los respectivos tensores de deformación y de tensión correspondientes a dicho punto.

Si pensamos en cualquier otro tipo de sistema continuo capaz de describir un comportamiento estructural —un plano y una ley de espesores de éste para definir una losa sometida a carga transversal y esfuerzos de flexión, una superficie delgada descrita por su superficie media y su ley de espesores para definir una membrana o una lámina— siempre dispondremos de grupos análogos de funciones para describir los parámetros relevantes de su comportamiento:

desplazamientos	$\boldsymbol{\upsilon}$
cargas	$\boldsymbol{\tau}$
deformaciones	$\boldsymbol{\epsilon}$
esfuerzos	$\boldsymbol{\sigma}$

Además de las anteriores definiciones disponíamos en el análisis de la viga de varias expresiones para relacionar las funciones definidas.

En primer lugar contamos con una expresión para representar la relación entre deformaciones y esfuerzos, definida por $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa\epsilon} \equiv M = EI\,c$. Para el punto material, la relación entre tensiones y deformaciones queda definida por la ecuación constitutiva del material empleado: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa\epsilon}$ es precisamente la definida en el apartado 2.6, expresión que puede generalizarse para otros tipos estructurales.

En segundo lugar, en el problema de la viga, a las anteriores relaciones de rigidez podíamos añadir las ecuaciones de compatibilidad, en la forma $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\partial\upsilon} \equiv c = z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. Hay que hacer notar aquí que en la expresión el término $\boldsymbol{\partial}$ alude a un operador diferencial lineal —que en la viga es la derivada segunda— que también encontramos, aunque en formas diferentes, en otros tipos estructurales. Por ejemplo, en el caso del movimiento del cuerpo elástico, el operador $\boldsymbol{\partial}$ obtiene las deformaciones a partir de derivadas de los desplazamientos, mediante las conocidas ecuaciones de la elasticidad

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}$$

que pueden expresarse en la forma

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\partial\upsilon} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Finalmente, además de las ecuaciones de compatibilidad, podíamos establecer las de equilibrio, que eran de la forma $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\partial}^T\boldsymbol{\epsilon} \equiv q = \partial^2 M/\partial x^2$. Hay que hacer notar aquí que en la expresión el término $\boldsymbol{\partial}^T$ alude nuevamente a un operador diferencial lineal —que en la viga es la derivada segunda— y que también encontramos con distinto formato en otros tipos estructurales. Por seguir con los ejemplos ya iniciados, en el caso del movimiento del cuerpo elástico el operador $\boldsymbol{\partial}^T$ obtiene las cargas a partir de las derivadas de las tensiones en el punto en

la forma expresada por las conocidas ecuaciones

$$\begin{aligned} p_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ p_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zyu}}{\partial z} &= 0 \\ p_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

que pueden expresarse en la forma

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

Hay que hacer constar aquí que, al igual que hicimos en el apartado 2.9.1 para formulaciones discretas de los problemas, obteniendo la relación entre las ecuaciones de equilibrio y las compatibilidad, puede demostrarse la relación que existe entre los operadores que describen el equilibrio y la compatibilidad en las formulaciones continuas, y que expresamos empleando los símbolos $\boldsymbol{\partial}$ y $\boldsymbol{\partial}^T$, traspuesto el uno del otro —se trata de operadores autoadjuntos en lenguaje matemático más abstracto— La demostración general ahora, que sigue la línea allí empleada, requeriría algo más de aparato, que sin embargo preferimos reservar ahora para el asunto que nos traemos entre manos.

Tenemos, por tanto, que los cuatro grupos de funciones están relacionados por las ecuaciones de

- equilibrio: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{\sigma}$
- compatibilidad: $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{v}$
- rigidez: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\epsilon}$

De las funciones anteriores, son conocidas las cargas en las regiones libres, y los desplazamientos en las regiones sustentadas. Los métodos clásicos de la elasticidad consistirían en enlazar las ecuaciones obtenidas y proceder a su integración aplicando como condiciones de contorno las anteriormente citadas, pero es una estrategia que no puede obtener resultados generales salvo en unos pocos casos canónicos.

Como alternativa a dicha estrategia el desarrollo de los métodos variacionales ha llevado a concebir primero, y a desarrollar de forma extensísima después, métodos alternativos entre los que destaca el de los elementos finitos.

La estrategia consiste en buscar no ya soluciones exactas desde la perspectiva matemática, sino sólo aproximaciones a las funciones que expresan los desplazamientos de la estructura, y a partir de tales aproximaciones, determinar el resto de las funciones que caracterizan el problema.

Pues en efecto, si pueden obtenerse funciones $\bar{\boldsymbol{v}}$ suficientemente aproximadas a las $\boldsymbol{v}$ que resuelven el problema, es decir, si

$$\boldsymbol{v} \approx \bar{\boldsymbol{v}}$$

entonces podrán obtenerse sucesivamente

$$\boldsymbol{\epsilon} \approx \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\partial}\bar{\boldsymbol{v}}$$
$$\boldsymbol{\sigma} \approx \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\kappa}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$$

Hay que hacer notar aquí que, dado que las deformaciones se obtienen como derivadas de los movimientos —como diferencias en regiones infinitesimales— los errores obtenidos en deformaciones y esfuerzos son inevitablemente mayores que los obtenidos en la expresión de los movimientos.

En cualquier caso, la estrategia adecuada para resolver las funciones de desplazamiento buscadas consiste en establecer éstas como combinación lineal de un conjunto finito de funciones establecidas a priori, y capaces de satisfacer las condiciones de contorno geométricas del problema.

Es decir, se formula que los desplazamientos $\bar{\boldsymbol{v}}$ se obtengan mediante la combinación lineal

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}.$$

En esta expresión, las $\boldsymbol{N}$ son las funciones establecidas a priori, y pueden ser consideradas como una base del espacio de desplazamientos que la aproximación es capaz de representar, que puede incluir o no el desplazamiento teórico de la estructura que se busca. A su vez los parámetros $\boldsymbol{a}$, inicialmente desconocidos, serán los valores a determinar buscando la máxima aproximación posible entre los desplazamientos aproximados obtenidos y los buscados. Pueden considerarse a dichos parámetros como las coordenadas que localizan el desplazamiento aproximado en el espacio de todas las formas de desplazamiento que la aproximación es capaz de representar. Hemos visto un ejemplo en la forma que hemos empleado para determinar la matriz de rigidez en flexión de una viga en el apartado 3.1.3, en el que el desplazamiento vertical z se obtenía mediante el producto de un conjunto de funciones $\boldsymbol{N}$ —que llamábamos funciones de forma— por los parámetros que en ese problema se traducían en los giros de extremo. En dicho problema, puesto que la elección de las funciones de forma se hizo asegurando el cumplimiento de la ecuación de la deformada elástica 3.7 el espacio de desplazamientos que las funciones pueden representar incluye todas las deformadas elásticas posibles sin carga, y la aproximación producirá resultados exactos. Pero podríamos haber escogido para las funciones de desplazamiento otras aproximadas y, aplicando la misma técnica, habríamos obtenido expresiones aproximadas para las relaciones buscadas.

Efectivamente eso es lo que haremos en el caso general: elegiremos como funciones de forma funciones que satisfagan las condiciones geométricas y que, al menos en los límites que corresponden a los casos de deformación constante, satisfagan las condiciones del problema elástico planteado.

Con dichas funciones postularemos la existencia de la aproximación

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}$$

con valores de parámetros $\boldsymbol{a}$ a determinar, y por lo tanto existirán las aproximaciones

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\partial}\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\partial}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a})$$
$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\kappa}\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\partial}\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\partial}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}).$$

Ahora bien, como los $\boldsymbol{a}$ representan valores de parámetros numéricos, que corresponden a las coordenadas fijas del desplazamiento buscado entre todos

los representables, las operaciones de diferenciación que establece $\boldsymbol{\partial}$ pueden aplicarse separadamente a las funciones $\boldsymbol{N}$, conocidas, de modo que la ecuación que aproxima las deformaciones resultará ser

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = (\boldsymbol{\partial N})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Ba},$$

en la que pueden ser obtenidas las funciones $\boldsymbol{B}$, como vimos en el ejemplo de la viga.

De este modo resultará

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\kappa}\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\kappa Ba},$$

expresión que incorpora las ecuaciones de compatibilidad y de rigidez correspondientes a la aproximación.

Para resolver el problema se tratará ahora de incorporar la ecuación de equilibrio, pero la estrategia ahora no consiste en emplear la formulación diferencial de dicha ecuación: se recurre ahora a formular el equilibrio mediante la aplicación del principio de los trabajos virtuales, por el cual el producto de un desplazamiento compatible por un estado equilibrado debe producir trabajo nulo —o trabajo interno igual al trabajo externo, salvo signos—

Tenemos pues el estado de equilibrio aproximado definido por las cargas $\boldsymbol{\tau}$ y los esfuerzos $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, y cualquier estado de desplazamientos compatible definido por los deplazamientos $\tilde{\boldsymbol{v}}$ y las correspondientes deformaciones $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$, por lo que podemos proceder a postular el equilibrio, obteniendo

$$\int_\Gamma \tilde{\boldsymbol{v}}^T \boldsymbol{\tau}\, d\Gamma = \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}\, d\Omega$$

Si ahora sustituimos con expresiones adecuadas a la aproximación, representando los desplazamientos compatibles considerados de forma similar a los aproximados que buscamos, tendremos

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (\boldsymbol{N}\tilde{\boldsymbol{a}})^T \boldsymbol{\tau}\, d\Gamma &= \int_\Omega (\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{a}})^T \boldsymbol{\kappa Ba}\, d\Omega \\
\int_\Gamma \tilde{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{\tau}\, d\Gamma &= \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\kappa Ba}\, d\Omega \\
\tilde{\boldsymbol{a}}^T \int_\Gamma \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{\tau}\, d\Gamma &= \tilde{\boldsymbol{a}}^T \int_\Omega \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\kappa Ba}\, d\Omega
\end{aligned}$$

Ahora bien, la última expresión debe ser cierta para cualesquiera valores de los parámetros $\tilde{\boldsymbol{a}}$ que representan todos casos de desplazamiento compatible con las condiciones geométricas planteadas. Como además, nuevamente, los parámetros $\boldsymbol{a}$ son valores numéricos, no funciones, pueden extraerse de la integral, que podrá ejecutarse resultando por tanto

$$\int_\Gamma \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{\tau}\, d\Gamma = \left(\int_\Omega \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\kappa B}\, d\Omega \right) \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Ka} \quad \text{con}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_\Gamma \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{\tau}\, d\Gamma, \quad \boldsymbol{K} = \int_\Omega \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\kappa B}\, d\Omega.$$

Puede volverse al ejemplo de la viga, en el que obtuvimos precisamente con esta técnica tanto los momentos de empotramiento perfecto —las cargas $\boldsymbol{F}$ a

aplicar a un modelo en el que la viga sea una componente— como las relaciones de rigidez entre momentos de extremo y movimientos de extremo, es decir, la matriz $\boldsymbol{k}$.

En estructuras genéricas la estrategia planteada exigiría producir funciones capaces de representar movimientos generales cumpliendo las condiciones de contorno —de sustentación, de adaptación a la geometría real, etc—. Como esto es muy difícil es habitual definir las funciones por regiones, por elementos —como la barra del ejemplo, o en regiones poligonales sencillas en los casos superficiales— de modo que cada grupo de funciones está asociado a un elemento haciéndose nulas en el resto. De este modo la anterior integral puede realizarse elemento por elemento

$$\sum_e \int_{\Gamma_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{\tau}\, d\Gamma_e = \sum_e \left(\int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{B}\, d\Omega_e \right) \boldsymbol{a}.$$

Esta técnica, de paso, reduce enormemente el problema de dimensiones de la integral pues los parámetros asociados a funciones que no recorren el elemento no necesitan ser considerados en éste.

Para asegurar la facilidad de interpretación de la formulación y las soluciones obtenidas, es también usual, aunque no necesario, establecer como parámetros los movimientos de ciertos puntos significativos del elemento, que se emplean igualmente en los elementos en contacto con él de modo que los movimientos de la región en contacto queden definidos por los de los puntos de contacto para asegurar que las funciones elegidas cumplen con las condiciones de continuidad y de ligadura de las ecuaciones que rigen el problema al menos en regiones de deformación constante, lo que asegura que reduciendo progresivamente el tamaño de los elementos nos estemos aproximando a dicha situación, y por tanto al cumplimiento estricto de las condiciones del problema, asegurando la convergencia de la solución. A esta última reflexión se la denomina en la literatura especializada *criterio de la parcela*.

Consideremos más despacio la última decisión apuntada, es decir la de establecer como parámetros los movimientos $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{a}$ de ciertos puntos privilegiados —nodos—. Puesto que el producto de esos parámetros por los términos que hemos simplificado con el símbolo $\boldsymbol{F}$ es un trabajo, y puesto que hemos establecido el equilibrio mediante el principio de trabajo nulo, dichos términos no serán otra cosa que las fuerzas equivalentes corrrespondientes a dichos grados de libertad, de modo que la expresión resulta ser finalmente la de una ecuación de rigidez para la estructura completa

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{U},$$

que permitirá resolver el problema en la forma usual

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F},$$

deduciéndose los desplazamientos mediante las expresiones ya establecidas para la aproximación, y permitiendo determinar, a partir de éstos, el resto de las funciones que representan el estado de la estructura.

Capítulo 5

Análisis basados en la disipación plástica

Como alternativa a los métodos de análisis elástico, que responden a las propiedades en el origen de la gráfica tensión deformación, se presentan en este capítulo los métodos de análisis que tratan de representar por el contrario el comportamiento derivado de las fases finales de dicha gráfica, métodos cuyos modelos más sencillos están basados en el análisis de la disipación de energía plástica en el proceso de colapso[1].

Se presentan en primer lugar modelos sencillos de rotura local para, en fases posteriores, extraer consecuencias de las propiedades de dichos modelos. Entre éstas deben destacar, por su generalidad y potencial predictivo, los teoremas del análisis límite que, por derivarse de conceptos energéticos, presentan una formulación dual que ya hemos apreciado en métodos anteriores.

5.1. Métodos en rotura. Teoremas del análisis límite.

5.1.1. Modelos de rotura

Si analizamos el proceso de rotura de un material dúctil para estados de carga uniaxiales, obtenemos usualmente gráficas que relacionan esfuerzos o tensiones similares a la de la figura 5.1, en la que se aprecia una importante rama horizontal o casi horizontal, en la que la deformación aumenta indefinidamente sin que, sin embargo, se pierda capacidad resistente, hasta que la deformación se hace muy grande, en términos relativos a las pequeñas deformaciones elásticas de la fase inicial de la gráfica. La plastificación queda de manifiesto en el proceso de descarga, en el que la deformación se hace permanente pese a que se elimine totalmente la carga: la rama de descarga llega a ser paralela a la de carga, pero desplazada en el valor de la deformación plástica remanente.

Los procesos de carga cíclica en que se superan las tensiones de plastificación provocan estados que pueden caracterizarse por las curvas de histéresis sobre

[1] Para una introducción más extensa y general a las bases del comportamiento plástico de los materiales y a las diversas teorías que tratan de modelarlo puede consultarse [Sánchez Gálvez, 1999].

la gráfica de tensión deformación. El área encerrada por éstas mide la energía disipada plásticamente.

Si la gráfica no es horizontal, el material presenta un endurecimiento que puede apreciarse en cada estado de carga en el que se supere el límite de tensiones alcanzado en alguna fase precedente: el límite elástico aparente se alcanza en cada fase con tensiones superiores.

Aunque la plastificación no aparece bruscamente como un vértice en la gráfica, salvo en materiales metálicos y en el caso de problemas muy sencillos, es posible definir de forma convencional un punto en el que la deformación remanente alcanza un límite prefijado. Ha sido ésta la técnica empleada en definir el límite elástico convencional en los aceros estirados en frío, pero puede generalizarse. Dicha generalización puede incluso extenderse a situaciones de plastificación dependientes de un parámetro —un esfuerzo agregado— que involucren regiones amplias de una pieza, como puede ser el caso de la flexión por momento en una pieza, en el que la gráfica de momento–curvatura en la región más solicitada tiene propiedades que se aproximan a las anteriores, aunque la plastificación involucra de hecho regiones amplias de la pieza en torno a la sección de máximo momento; incluso la gráfica carga–desplazamiento en estructuras sencillas suficientemente dúctiles presenta propiedades semejantes.

Si el material está sometido a estados de tensión que no pueden definirse por un solo parámetro, las gráficas pueden realizarse para cada pareja o conjunto de parámetros. En este caso es usual tratar de caracterizar las condiciones de plastificación en los valores combinados de tensión correspondientes a los estados planos o triples en los que la deformación remanente supera un límite dado.

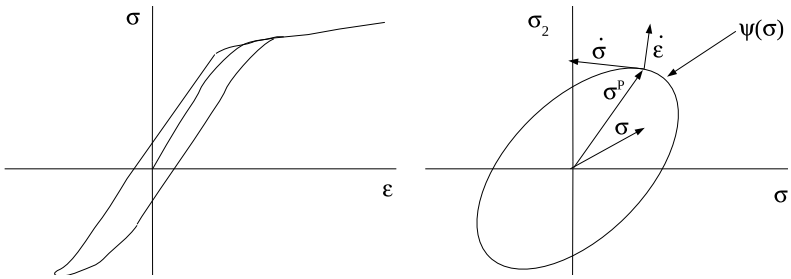


Figura 5.1: Gráficas tensión deformación, y superficie de fluencia

En el caso de las estructuras de edificación, en el que la mayor parte de los estados combinados de tensión más complejos suelen ser planos, bastará usualmente la representación cartesiana de las dos tensiones principales correspondientes a los distintos estados en que se produce la plastificación. Dicha combinación de estados delimita una curva que caracteriza la plastificación. Para estados que deban ser descritos por tres (o más) parámetros, la región que identifica los estados de plastificación pasa a ser una (hiper)superficie. A dicha curva o superficie se la denomina superficie límite, superficie de fluencia, o criterio de plastificación y se representa por la función que la define, $\psi(\boldsymbol{\sigma}) = 0$. Modelos clásicos de ésta son los correspondientes a los criterios de Von Mises —la rotura se produce al superarse un límite en la densidad de energía de distorsión— y de Tresca —la rotura se produce al superarse un límite en la tensión tangencial para el plano en el que ésta es máxima—. El mismo concepto

de superficie límite puede generalizarse, y aplicarse a la representación de los estados límite o de rotura definidos en términos de combinaciones de esfuerzos *agregados*[2] Σ en la forma $\Psi(\Sigma) = 0$. Para ello bastará

- que el material empleado tenga definida una función de plastificación $\psi(\sigma)$ válida para las tensiones de punto σ —cuyas correspondientes deformaciones se denotan con ε— función para la que sea correcta la condición de ortogonalidad en la situación límite, o *regla de flujo* que analizaremos más adelante, y que se expresaría en la forma
$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \lambda \dot{\varepsilon}$$
- que la caracterización del equilibrio para el comportamiento agregado pueda hacerse a través de parámetros de esfuerzo —o incluso de carga— Σ determinables a partir de los σ mediante expresiones lineales del tipo $\Sigma = \Sigma(\sigma) = \int_\Omega L(\sigma) d\Omega$, siendo $L(\cdot)$ un operador lineal, tal vez diferencial, sobre σ.
- que la caracterización cinemática del comportamiento agregado se haga mediante parámetros cinemáticos E —o sus velocidades $\dot{E}$— tales que las deformaciones ε puedan deducirse de ellos a través de la expresión $\varepsilon = L^T(E)$ donde $L^T(\cdot)$ es el operador adjunto de $L(\cdot)$ es decir $\int_\Omega a^T \cdot L(b) d\Omega = \int_\Omega L^T(a) \cdot b d\Omega$
- que la función $\Psi(\Sigma)$ pueda construirse mediante alguna expresión del tipo $\Psi(\Sigma) = \int_\Omega A(\psi(\sigma)) d\Omega$ siendo A constante en el dominio, para lo que debe definirse alguna forma para la relación $\sigma(\Sigma)$ —lo que equivaldría a definir algún tipo de pseudoinversa, no necesariamente una inversa matemática inexistente, de la relación $\Sigma(\sigma)$ ya señalada antes—

La segunda y tercera condiciones aseguran que el cambio de representación de cualesquiera condiciones estáticas y cinemáticas σ, $\dot{\varepsilon}$ a sus transformadas Σ, $\dot{E}$ se producen respetando la invariancia en los trabajos según la expresión $\int_\Omega \dot{\varepsilon}^T \cdot \sigma d\Omega = \dot{E}^T \cdot \Sigma$.

Todas ellas aseguran para Ψ el cumplimiento de la condición básica de ortogonalidad en la situación de flujo plástico, expresada por
$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Sigma} = \Lambda \dot{E}$$

Pues efectivamente
$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial \Sigma} &= \int_\Omega \frac{\partial A}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \Sigma} d\Omega = A'_\psi \int_\Omega \lambda \dot{\varepsilon} \frac{\partial \sigma}{\partial \Sigma} d\Omega \\ &= A'_\psi \lambda \int_\Omega L^T(\dot{E}) \frac{\partial \sigma}{\partial \Sigma} d\Omega = A'_\psi \lambda \dot{E} \int_\Omega \frac{\partial L(\sigma)}{\partial \Sigma} d\Omega \\ &= A'_\psi \lambda \dot{E} \frac{\partial}{\partial \Sigma} \int_\Omega L(\sigma) d\Omega = A'_\psi \lambda \dot{E} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Sigma} = \Lambda \dot{E}\end{aligned}$$

[2]Nótese que tanto en apartados anteriores, como en los que seguirán, solemos considerar dos grupos de *agregados* separados, usando en la notación habitual $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{u}$ para los esfuerzos y las correspondientes deformaciones internas en un conjunto finito de secciones estructurales, y $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{U}$ para el conjunto finito de cargas y movimientos *generalizados* de la estructura. Los esfuerzos o deformaciones denotados aquí por Σ y E pueden representar cualquiera de dichos casos.

Un ejemplo típico de esa función límite es el de la figura 5.2, que representa las condiciones de rotura de una rebanada de una pieza sometida a flexocompresión en un material sin resistencia a tracción como puede ser el hormigón o los materiales de fábrica[3].

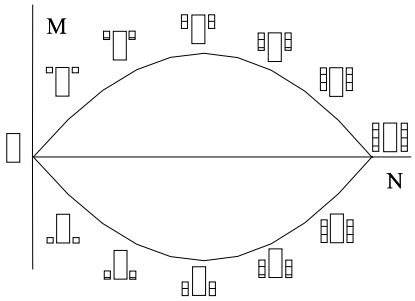


Figura 5.2: Superficie de fluencia en rebanada de material sin tracciones

Una propiedad de dicha clase de figuras en la mayoría de las condiciones, básica para un adecuado tratamiento matemático de los problemas ligados a las correspondientes condiciones de rotura, es su convexidad.

El endurecimiento del material, si existe, puede representarse en estos casos mediante una familia de funciones límite. Su empleo requerirá definir un parámetro de endurecimiento que permita seleccionar la función correspondiente al valor del endurecimiento alcanzado. Un parámetro clásico es la densidad de energía disipada en el punto considerado.

En lo que sigue supondremos horizontal la rama plástica, ignorando el remanente de resistencia que puede aportar el fenómeno del endurecimiento. Como

[3]Cabe señalar que puede aproximarse la doble parábola dibujada por el hexágono que las envuelve trazando las tangentes en los puntos de máximo y mínimo normal y momento. Cabe hacer notar que en dicho trazado, las tangentes oblicuas tienen una pendiente que es igual que el brazo plástico $z_{pl} = h/2$ de la versión *dúctil* de la sección, lo que puede comprobarse sin más que verificar que el momento máximo es igual al producto de la resistencia de media sección por medio brazo, tal como resulta de las propiedades de la parábola: $M_m = N_m z_{pl}/4$. De este modo las seis comprobaciones representadas en el hexágono, considerando negativas a las compresiones, serán

$$N_m \leq N + \frac{M}{z_{pl}} \leq 0$$

$$N_m \leq N - \frac{M}{z_{pl}} \leq 0$$

$$N_m \leq 4\frac{M}{z_{pl}} \leq -N_m$$

ecuaciones que pueden reescribirse también en la forma

$$\begin{bmatrix} m & n \\ -m & -n \\ m & -n \\ -m & n \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ n \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} |N_m| z_{pl}$$

en las que $n = 1/\sqrt{1+z_{pl}^2}$, $m = z_{pl}/\sqrt{1+z_{pl}^2}$, resultando por tanto expresiones que corresponden al formato general de la ecuación 2.7.

podrá entenderse en los apartados siguientes este planteamiento permite el análisis del comportamiento de la estructura en sus estadios finales, en oposición al resultado del enfoque elástico que, en puridad, representa muy adecuadamente su comportamiento en los estadios iniciales.

Al no considerarse endurecimiento y suponer horizontal la rama plástica, estamos adoptando un modelo de comportamiento *elasto-plástico*, y la superficie límite que representa los posibles estados de rotura será única. Un estado de esfuerzos representado por un punto en el interior de dicha superficie, con $\psi(\boldsymbol{\sigma}) < 0$, corresponde a un estado de esfuerzos posible y en régimen elástico.

Un punto en dicha superficie representa un posible estado de plastificación, un estado en el que se produce movimiento de colapso generalizado, con disipación de energía a través de los procesos de flujo plástico con deformación plástica irreversible e importante disipación de calor, y los puntos exteriores a dicha superficie, con $\psi(\boldsymbol{\sigma}) > 0$, representan estados o combinaciones de esfuerzo imposibles de alcanzar.

5.1.2. Regla de flujo

Si analizamos la superficie de fluencia del ejemplo en flexocompresión del apartado anterior, y exploramos algunas de sus propiedades en las proximidades del origen, nos encontramos con las propiedades aproximadas de la teoría clásica de rotura en arcos de fábrica: el material tiene resistencia sobreabundante, infinita en el límite, para esfuerzos normales centrados, pero *rompe* cuando la excentricidad de la carga supera un límite, que, si las tensiones de trabajo son bajas, puede convencionalmente situarse en el límite de la sección, como si la resistencia a tensión normal de compresión fuese infinita siendo nula la resistencia a tensión normal de tracción.

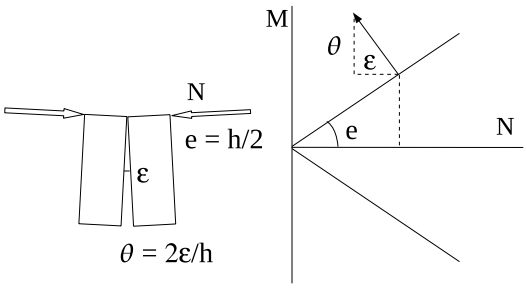


Figura 5.3: Ortogonalidad de deformaciones plásticas a esfuerzos

Estudiando el estado de esfuerzos, y la forma de rotación de la junta en dicha condición límite encontramos una interesante propiedad que se reproduce en otros casos de rotura plástica: el vector que representa el movimiento de rotura que, referido al centro de gravedad como es usual, implica una dilatación de la junta y una rotación entre sus caras, es ortogonal al vector que representa la variación del estado de esfuerzos (normal y momento) en la situación de plastificación que corresponde a la rotura.

Dado que una vez iniciada la rotura, ésta continúa si se ha alcanzado el colapso estructural, resulta sensato y sencillo representar la diferencia de deformación entre dos instantes sucesivos, por lo que el vector de deformaciones no es tan útil como el que representa las velocidades de deformación y permite describir por tanto la geometría del proceso de colapso.

Dichas velocidades se deducen de la regla de flujo que, en plasticidad *asociada* se deriva de la superficie de fluencia mediante la expresión

$$\lambda \dot{\epsilon}_i = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_i}$$

Esta expresión, denominada usualmente *regla de flujo de von Mises*, manifiesta la ortogonalidad entre el vector de velocidad de deformación, y el que representa las variaciones de estado de tensión, que deben mantenerse dentro de la superficie de fluencia mientras se mantenga el estado de plastificación del punto considerado.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \perp \dot{\boldsymbol{\sigma}}^P \implies \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}^P = 0 \implies \int_\Omega \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}^P \, dV = 0$$

La ortogonalidad no se produce en los casos de plasticidad *no asociada*, en los que las velocidades de deformación se derivan de expresiones potenciales no coincidentes con la función que representa la superficie de fluencia, caso usual en la representación de suelos, o en los casos en que la rotura se asocia a fenómenos de deslizamiento

$$\lambda \dot{\epsilon}_i = \frac{\partial g}{\partial \sigma_i}, \quad \psi \neq g.$$

Para los casos de plasticidad *asociada* la ortogonalidad es la base de los teoremas fundamentales del análisis plástico, que se verán más adelante.

Dicha condición de ortogonalidad puede argumentarse considerando, siguiendo en ello a [Save, 1983], que la disipación en una estructura perfectamente plástica correspondiente al estado de flujo plástico definido por las velocidades de deformación[4] $\dot{\boldsymbol{u}}$ es una función homogénea de dichas velocidades $D(\dot{\boldsymbol{u}})$, es decir, que $D(c\dot{\boldsymbol{u}}) = cD(\dot{\boldsymbol{u}})$. Para esta estructura, la condición de admisibilidad plástica de un estado de esfuerzos internos $\boldsymbol{f}$ es que la energía disipada en el movimiento de colapso por tales esfuerzos sea menor o igual que la definida por la función de disipación: $\boldsymbol{f}^T \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \leq D(\dot{\boldsymbol{u}})$, representando la condición de igualdad la situación de plastificación. En dichas condiciones, la anterior ecuación expresa que los puntos que definen cualquiera de los estados de esfuerzos internos $\boldsymbol{f}$ correspondientes a una plastificación para la forma de colapso definida por $\dot{\boldsymbol{u}}$ describen un hiperplano perpendicular a dicho vector $\dot{\boldsymbol{u}}$, y puesto que la superficie límite no sería más que la intersección de todos los hiperplanos correspondientes a todas las posibles geometrías del colapso, siempre tendríamos dicha ortogonalidad. En el caso de puntos angulosos en la superficie límite, el vector $\dot{\boldsymbol{u}}$ estará incluído en el cono definido por las normales a los planos que confluyen en la singularidad.

Lo anterior es equivalente a afirmar que los esfuerzos plásticos en el estado de colapso, para una cinemática de colapso dada, son aquellos que maximizan

[4] Usamos aquí el criterio de representar la deformación plástica y los esfuerzos en los correspondientes puntos –o secciones– mediante un conjunto finito de valores más que como un continuo descrito mediante funciones de punto. Por lo tanto, ahora $\boldsymbol{f}$ representa el conjunto de esfuerzos de colapso y $\dot{\boldsymbol{u}}$ el conjunto de velocidades de deformación de la geometría del colapso.

la disipación en la estructura, hipótesis ya formulada por von Mises en 1928, tal y como reseña [Nielsen, 1998]. Por tanto, si la disipación puede medirse con $D = \dot{\boldsymbol{u}}^T \cdot \boldsymbol{f}$ siendo máxima para las variaciones de $\boldsymbol{f}$ resultará que[5]

$$\partial D = \dot{\boldsymbol{u}}^T \cdot \partial \boldsymbol{f} = 0$$

Como además cualquier estado de esfuerzos debe permanecer permanentemente en la superficie límite, tendremos igualmente que

$$\psi(\boldsymbol{f}) = \psi(\boldsymbol{f} + \partial \boldsymbol{f}) = 0$$

y por tanto

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{f}}\right)^T \cdot \partial \boldsymbol{f} = 0$$

.

Comparando dichas expresiones resulta que

$$\lambda \dot{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{f}}$$

y tendremos que para que la disipación sea máxima (estacionaria) la deformación de colapso debe ser ortogonal a la superficie de fluencia.

5.1.3. Modelos de seguridad

Antes de abordar los teoremas fundamentales del análisis plástico merece la pena, por venir al caso, hacer una pequeña digresión sobre los modelos de seguridad al uso. Si observamos la representación de los estados de esfuerzo que supone la superficie de fluencia, obtener seguridad frente a rotura supone asegurar que los estados de esfuerzos derivados de las diversas condiciones de carga a que la estructura va a estar sometida se sitúen suficientemente alejados de dicha superficie, para asegurar que se evita alcanzar alguno de los casos de rotura (figura 5.4).

El procedimiento más clásico, asociado a los llamados coeficientes de seguridad, establece las situaciones de rotura, y trata de alejarse de ellas reduciendo las resistencias que representan el comportamiento del material, así como las cargas respecto de las que provocan la rotura en ese material reducido, mediante un factor que se aplica a todas ellas: la rotura se concibe sólo para situaciones de carga mayorada mediante un coeficiente de seguridad que podemos denominar *mecánico*. La comprobación, en el formato de las normas tradicionales era del tipo $\sigma_d \leq \frac{f}{\gamma}$, y a éste formato pueden reducirse, en los casos lineales, las comprobaciones prescritas en la actual normativa $\sigma_d(Q\gamma_f) \leq \frac{f}{\gamma_m}$. El procedimiento es inseguro en situaciones en las que, como en el equilibrio de los arcos de fábrica, la seguridad es más bien un problema geométrico. En el caso de los arcos sin resistencia a tracción se trata de que la resultante de las presiones correspondiente a los estados de carga previstos esté suficientemente dentro de la sección, como para asegurar que no se produce la rótula asociada al proceso de colapso. No se trata de un mero problema de carencia de resistencia en el

[5] Resulta igual expresión si consideramos el principio de los trabajos virtuales aplicado a los campos de esfuerzos equilibrados definidos por $\partial \boldsymbol{f}$ y de movimientos compatibles establecidos por $\dot{\boldsymbol{u}}$

material: el colapso podría producirse aun con material de resistencia infinita en compresión si la sección resulta insuficiente. En este caso lo que se está haciendo es configurar un coeficiente de seguridad *geométrico* que opera en el sentido de reducir la geometría de la sección disponible. La comprobación ahora es que la geometría considerada para el cálculo permita el equilibrio, con $g_d \leq \frac{g}{\gamma}$. Pero dicha estrategia no es suficientemente segura en el problema reseñado en los casos de cargas de pequeña magnitud si no se combina este modelo de seguridad adecuadamente con la previsión de hipótesis alternativas de carga, hipótesis en las que se tenga en cuenta la incertidumbre sobre su magnitud y posición real.

Los casos citados corresponden a situaciones en las que el origen de la gráfica de esfuerzos —o de cargas— está próximo a una de las posibles situaciones de colapso. En casos en los que el origen se sitúa relativamente centrado respecto de las situaciones de colapso, las estrategias anteriores pueden considerarse intercambiables.

Una estrategia alternativa capaz de dar adecuada cuenta de la seguridad en todas las situaciones apuntadas consiste en establecer la seguridad mediante una reducción de la región ocupada por la superficie límite obtenida, no por la vía de la reducción de los esfuerzos máximos, o de la geometría disponible, sino por la vía de la reducción del potencial representado por la función $\psi(\sigma)$, adoptando por tanto como superficie límite para el cálculo la reducida $\psi(\sigma) - \gamma = 0$. Esta estrategia implica, en el caso que hemos citado del equilibrio de un arco sin resistencia a tracción, que obtener la seguridad requerida va a exigir la existencia en cualquier caso de un nivel de carga mínimo, sin el que la seguridad es inalcanzable. En la figura 5.5 podemos observar con claridad la muy diferente forma con que se aborda la corrección de una situación límite partiendo de cada una de las tres estrategias de seguridad reseñadas.

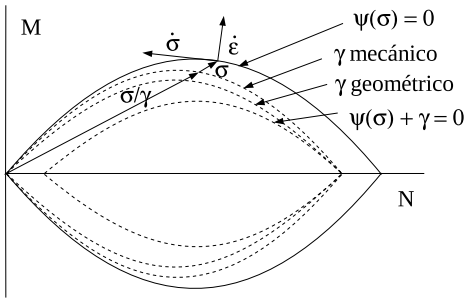


Figura 5.4: Superficie límite y criterios de seguridad en una junta de arco sin resistencia a tracción

Un modelo robusto de medir el margen de seguridad

Por lo visto en las anteriores figuras, si el punto de esfuerzo nulo coincide con el centro de la superficie de rotura, el coeficiente de seguridad no es más que un factor entre dos figuras homólogas, la de rotura, y la de rotura empleada para el cálculo, versión reducida en tamaño de aquella, siendo dicho *centro* el de la reducción. Si dicho punto de esfuerzo nulo no es el centro de la superficie

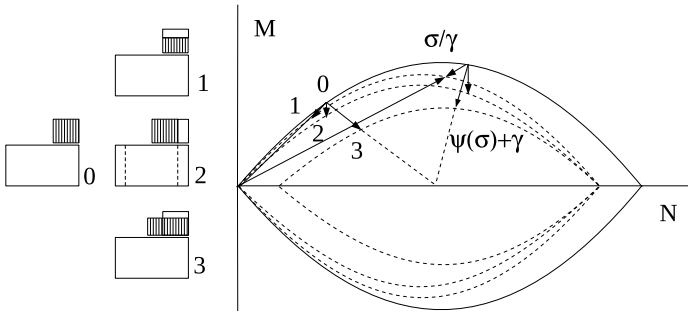


Figura 5.5: Corrección de una situación insegura dependiente del criterio empleado.

de rotura, debemos corregir el criterio de comprobación de seguridad; las líneas siguientes aportan una línea sencilla para hacerlo.

Sea $\boldsymbol{\sigma}$ un estado de esfuerzo —o de carga— seguro, y sea $\psi(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$ la superficie de rotura correspondiente a las variantes posibles para dicho estado cuyo *centro* —o posición de máximo alejamiento a dicha superficie— esté localizado en $\boldsymbol{\sigma}_0$. El estado $\boldsymbol{\sigma}$ correpondería a un estado de rotura en el caso de una reducción de la superficie a una homóloga menor, y la relación entre las dimensiones lineales de dichas superficies puede dar la medida del *margen de seguridad* correspondiente al estado $\boldsymbol{\sigma}$.

El gradiente de la función que define la superficie en el punto de rotura más próximo al punto considerado define un vector $\boldsymbol{g}$ ortogonal al plano tangente a ésta en dicha posición de rotura. Viendo la figura 5.6, podemos considerar como margen de seguridad, análogo al *coeficiente de seguridad* habitual para las cargas, al cociente entre las proyecciones sobre dicha dirección $\boldsymbol{g}$ del vector que representa al de esfuerzos medido desde el punto de máximo alejamiento a la superficie de rotura, más su distancia hasta el punto de rotura, y del vector de esfuerzos mismo, es decir, el cociente entre los segmentos AC y AB de la figura.

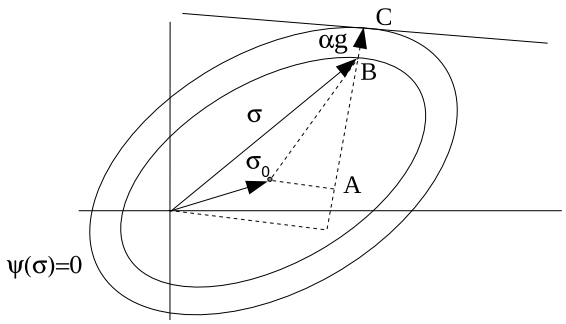


Figura 5.6: Criterio robusto para medir el margen de seguridad.

Nótese que si en la figura 5.6 se consideran puntos arbitrarios, por ejemplo

porque el procedimiento de análisis empleado compara el estado de esfuerzos con todos los planos que aproximan la superficie, tendremos que según se aleja el punto B que representa la proyección de los esfuerzos considerados del que representa la proyección de los esfuerzos de rotura C, el margen de seguridad crecerá hasta hacerse infinito cuando B coincida con A, e incluso cambiará de signo si pasa a estar situado en la proyección más allá de A, es decir, si el centro de la figura queda más cerca del plano de rotura considerado que el punto que se comprueba.

La distancia entre el estado seguro y el de rotura próximo se puede definir con el vector $\alpha\boldsymbol{g}$, por ser proporcional al gradiente señalado, y el margen de seguridad puede medirse, por tanto con

$$\gamma = \frac{\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_0+\alpha\boldsymbol{g})}{\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_0)}$$

Ahora bien, si consideramos el plano tangente como una aproximación de la superficie de rotura en el entorno considerado, la comprobación tendrá como forma general la expresión $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\sigma}-d\leq 0$ o, en la condición de rotura, $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\sigma}_p-d=0$, expresiones en las que si $\boldsymbol{g}$ es unitario representará el versor del plano, y la comprobación dirá que la proyección sobre dicho versor del vector que representa el estado debe ser menor que la distancia del origen de carga a dicho plano. Para este plano, el punto de rotura más próximo al del estado analizado se representa con $(\boldsymbol{\sigma}+\alpha\boldsymbol{g})$ y para dicho punto de rotura se dará la igualdad

$$\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{\sigma}+\alpha\boldsymbol{g})-d=0$$

expresión en la que podemos determinar α fácilmente:

$$\alpha = \frac{d-\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g}}$$

Como $\boldsymbol{\sigma}+\alpha\boldsymbol{g}$ es el esfuerzo en la condición de plastificación, y d puede entenderse como la resistencia en la *dirección* de colapso definida por $\boldsymbol{g}$, la anterior ecuación representa una versión de las ecuaciones de resistencia que van a aparecer repetidamente en los apartados que siguen.

Resultará que

- si $\alpha > 0$, el estado es interior a la superficie, y por tanto seguro —con grado de seguridad a determinar—
- si $\alpha = 0$, el estado es de rotura
- si $\alpha < 0$, el estado es exterior a la superficie de rotura y por tanto imposible de alcanzar.

El magen de seguridad para el primero de los casos anteriores, siguiendo la ecuación descrita más arriba será

$$\gamma = \frac{\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{\sigma}+\alpha\boldsymbol{g})-\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\sigma}_0}{\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_0)} = \frac{d-\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\sigma}_0}{\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_0)} = \frac{\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{\sigma}_p-\boldsymbol{\sigma}_0)}{\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_0)} \tag{5.1}$$

De este modo, si podemos determinar los gradientes a la superficie —los planos tangentes a ésta en las regiones de interés— y las distancias de los planos tangentes más cercanos a los estados a comprobar, la determinación del grado

de seguridad es sencilla, no presenta los inconvenientes derivados de la mayor o menor proximidad del punto de carga nula a la superficie límite, y la expresión propuesta es consistente con los modelos al uso en los casos en que el punto de carga nula y el centro de la superficie límite coinciden[6]. Es evidente que para que este enfoque resulte completamente adecuado, la métrica utilizada para cada una de las dimensiones en las que se sitúa la superficie límite debe ser tal que la incertidumbre sobre los valores correspondientes resulte similar en todas ellas. En ausencia de un criterio más fundamentado, preferentemente basado en el análisis del problema de resistencia como un problema de variables aleatorias (ver [G.Augusti et al., 1984]), resulta razonable representar cada una de las dimensiones en formato adimensional, como cocientes entre la solicitación en dicha dimensión frente a la resistencia máxima en ella (S_d/R_d), tal como es habitual en las expresiones de interacción utilizadas en los Eurocódigos.

5.1.4. Teoremas fundamentales

Vamos a considerar a continuación el enunciado de los teoremas fundamentales del análisis límite tras demostrar la siguiente afirmación básica en este modelo:

Teorema 1 *En el colapso sólo varía la deformación plástica.*

En el proceso de carga podemos descomponer, en un modelo relativamente sencillo las deformaciones acumuladas en dos partes, la parte elástica, asociada a la pendiente en el origen de la gráfica tensión deformación, y que no da origen a deformaciones permanentes, y la parte plástica, asociada a la parte horizontal de la gráfica. A lo largo del —inicio del— proceso de colapso debe mantenerse el equilibrio entre las cargas y los esfuerzos internos, y por lo tanto el equilibrio entre la variación de carga para dos estados sucesivos con la variación de esfuerzos entre dichos estados, por lo que igualando los respectivos trabajos de deformación por unidad de tiempo para las deformaciones compatibles asociadas al colapso tenemos

$$\int_\Gamma \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^T \dot{\boldsymbol{\tau}}\, dS - \int_\Omega \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}\, dV = 0$$

Ahora bien, en el proceso de colapso las cargas no varían, por lo que $\dot{\boldsymbol{\tau}} = 0$. Además, descomponiendo las deformaciones en sus componentes elástica y plástica, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ tendremos que

$$\int_\Omega \left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\right)^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}\, dV = 0$$

lo que implica que

$$\int_\Omega \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{eT} \dot{\boldsymbol{\sigma}}\, dV + \int_\Omega \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT} \dot{\boldsymbol{\sigma}}\, dV = 0$$

Pero en la última expresión el segundo sumando es nulo si estamos en un caso de plasticidad asociada, por lo que el primero debe serlo igualmente y, puesto

[6] Efectivamente, si se da dicha coincidencia, $\boldsymbol{\sigma}_0$ será el vector nulo, de modo que el coeficiente resultante, $\gamma = d/\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, cociente entre proyecciones sobre la ortogonal al plano, coincide por Tales con el coeficiente de seguridad mecánico habitual, cociente entre los módulos de los dos vectores colineales que representan uno, la llegada al plano de rotura, y otro, el estado de esfuerzos considerado.

que las tensiones pueden estar variando, serán las componentes de deformación elástica las que se mantienen estables para asegurar que dicho primer término de la suma también permanece nulo, lo que demuestra que en el colapso sólo varía la deformación plástica, manteniéndose estables las partes elásticas de la deformación alcanzadas antes del colapso mismo.

Esto permitirá analizar el proceso del colapso ignorando la deformación elástica que le precede que, si como es usual corresponde a estados de pequeñas deformaciones, puede suponerse nula, suponiendo invariable la geometría de las regiones no plastificadas de la estructura, y adoptando, por tanto, para ellas formas de movimiento como sólido rígido.

Teorema 2 (Teorema estático o del límite inferior) *Si en una estructura, para un sistema de cargas dadas* $\boldsymbol{\tau}$

- *puede establecerse un estado de tensiones o esfuerzos internos* $\boldsymbol{\sigma}$ *en equilibrio, y*
- *para dichos esfuerzos no se alcanza la condición de rotura o plastificación completa*

entonces la estructura no colapsa para dichas cargas, o lo que es lo mismo, las cargas dadas suponen un límite inferior a la carga de rotura de la estructura.

Lo demostraremos por reducción al absurdo, suponiendo que se cumplen las condiciones establecidas, pero que pese a todo se produce el colapso bajo las cargas.

Resultará que, por un lado existe un conjunto de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ en equilibrio entre sí y con las cargas $\boldsymbol{\tau}$, pero dándose el colapso deberá existir una cinemática con velocidades de deformación $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ compatibles con las velocidades de desplazamiento $\dot{\boldsymbol{\upsilon}}$. Las deformaciones deberán estar asociadas a unos esfuerzos internos de plastificación que, puesto que se ha iniciado el colapso, debe ser capaces de equilibrar como máximo un conjunto de cargas $\gamma\boldsymbol{\tau}$, con $\gamma \leq 1$.

En estas condiciones tendremos que, por el principio de los trabajos virtuales, e igualando trabajo interno y externo en el producto del estado cinemático compatible por cada uno de los dos estados equilibrados

$$\int_\Gamma \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^T \boldsymbol{\tau}\, dS = \int_\Omega \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV$$
$$\int_\Gamma \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^T \gamma\boldsymbol{\tau}\, dS = \int_\Omega \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma}^P\, dV$$

por lo que debe resultar

$$0 = \int_\Omega \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \left(\boldsymbol{\sigma}^P - \gamma\boldsymbol{\sigma}\right)\, dV$$

lo que es imposible dado que, como se ve en la figura 5.7, la diferencia de esfuerzos no puede ser ortogonal a la velocidad de deformación, dada la convexidad de la superficie de fluencia. Esto invalida la suposición de que se produce el colapso bajo las cargas, demostrando el teorema

Para que el teorema sea de aplicación, no deben producirse fenómenos de inestabilidad (pandeo), y las secciones que plastifican deben presentar ductilidad suficiente para que se produzcan deformaciones plásticas apreciables sin rotura.

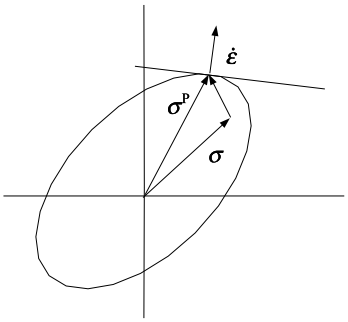


Figura 5.7: Diferencia de esfuerzos no ortogonal a deformaciones plásticas

Una consecuencia extremadamente importante del teorema es que basta establecer un sistema equilibrado con las cargas, y asegurar resistencia suficiente para el mismo, para asegurar que la carga de rotura no es alcanzada, siempre que haya suficiente ductilidad. De hecho es esta conclusión del teorema la que, paradójicamente, hace válidas las soluciones del análisis elástico. Pues efectivamente, los requisitos de la información necesaria para asegurar la validez de los modelos de rigidez empleados en el análisis elástico no siempre pueden cumplirse: por ejemplo, en las estructuras de hormigón armado es usual realizar el análisis con las rigideces brutas de la sección del hormigón, aunque luego se armarán dichas secciones de forma variada, resultando rigideces variables en muy amplia medida, máxime considerando la fisuración del hormigón. De hecho la rigidez de las piezas en flexión que se emplea para la determinación de deformaciones es la fisurada, aun cuando se emplea con los resultados obtenidos del análisis realizado con secciones brutas no fisuradas... Tanta contradicción sería inaceptable de no ser porque el teorema estático asegura que el estado equilibrado obtenido por el método elástico, junto con la suficiente resistencia en todas las secciones adoptada a partir del mismo constituyen condición suficiente para asegurar que la carga con que rompe la estructura es mayor que la considerada en el análisis.

Teorema 3 (Teorema cinemático, o del límite superior) *Es el dual del anterior: si para un esquema de colapso compatible $\dot{\boldsymbol{v}}$, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ arbitrariamente establecido se calculan las cargas $\boldsymbol{\tau}$ que pierden en dicho colapso tanta energía como la que se disipa en la deformación plástica, puede asegurarse que la estructura colapsará bajo dichas cargas, o lo que es lo mismo, que las cargas $\boldsymbol{\tau}$ constituyen un límite superior para la carga de rotura de la estructura.*

La demostración se hace nuevamente por reducción al absurdo, suponiendo que no existe tal colapso, por lo que existiría un estado de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ en equilibrio con las cargas, para el que no se ha alcanzado la superficie límite de fluencia.

En estas condiciones podemos plantear, por un lado la ecuación mediante la que se determinan las cargas por igualdad entre la energía plástica disipada y la energía perdida por las cargas:

$$\int_\Gamma \dot{\boldsymbol{v}}^T \boldsymbol{\tau}\, dS = \int_\Omega \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma}^P\, dV$$

y por otro lado, en virtud del principio de los trabajos virtuales, la ecuación de igualdad entre los trabajos externo e interno en el producto de la deformación de colapso compatible considerada, por el estado equilibrado que existirá caso de no haber tal colapso:

$$\int_{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^T \boldsymbol{\tau}\, dS = \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV$$

Restando ambas ecuaciones resulta

$$0 = \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \left(\boldsymbol{\sigma}^P - \boldsymbol{\sigma}\right)\, dV$$

que resulta ser nuevamente imposible por razones idénticas a las del caso anterior.

Esto demuestra el teorema.

Una aplicación inmediata del teorema consiste en la estimación de cargas de rotura por el sencillo método de suponer una geometría de colapso, y determinar las cargas que pierden tanta energía como la disipada plásticamente. Desgraciadamente se trata de una estimación que está en el lado de la inseguridad: la carga de rotura es igual o menor que la estimada, por lo que el proceso debería repetirse con geometrías alternativas eligiendo la menor carga de las obtenidas. Salvo que se pueda asegurar que se han considerado todas las geometrías posibles, el resultado será siempre inseguro.

Sin embargo, siempre se puede volver a usar las propiedades del teorema anterior, y, a partir de los valores estimados que lo serán en sólo algunos de los puntos de la estructura, reconstruir el equilibrio completo en todas sus partes —lo que será posible mediante las ecuaciones de equilibrio, puesto que ya se han empleado las de compatibilidad para determinar los esfuerzos plásticos, eliminando así la indeterminación hiperestática— y asegurar resistencia suficiente en todas las secciones para los esfuerzos así obtenidos: en este proceso obtendremos usualmente posiciones diferentes para las regiones que plastifican, con mayores esfuerzos de los obtenidos en el análisis de la cinemática del colapso que habíamos elegido arbitrariamente, y que no corresponderá al del colapso real. Bastará hacer más resistentes las correspondientes secciones para que sea de aplicación el teorema estático.

Como en el caso del análisis elástico, los dos teoremas precedentes suponen una visión dual del problema, cuya concurrencia determina una solución completa del problema, hiperestático en general.

Teorema 4 (Teorema de unicidad) *En el caso de que se cumplan las condiciones de los dos teoremas precedentes, a saber,*

- *que exista un estado equilibrado de esfuerzos con las cargas actuantes.*
- *que los esfuerzos sean en cualquier región de la estructura iguales o menores a los que provocan la plastificación de dicha región*
- *que exista un estado de colapso cinemáticamente compatible cuyas rótulas —o regiones en flujo plástico— se correspondan con las posiciones en las que el esfuerzo es igual al de plastificación*

puede asegurarse que la carga considerada es la carga de rotura de la estructura,

pues efectivamente,

- por darse las condiciones del teorema estático la carga de rotura debe ser igual o mayor que la considerada —la carga empleada en el análisis es un límite inferior para la carga de rotura—
- por darse las condiciones del teorema cinemático, la carga de rotura es igual o menor que la carga considerada —la carga empleada en el análisis es un límite superior para la carga que produce la rotura—-.

Puesto que coinciden en un mismo valor el límite superior y el límite inferior, dicho valor es la carga de rotura.

Hay que hacer notar que las condiciones del teorema de unicidad reproducen en el análisis plástico las tres condiciones que usábamos en análisis elástico para determinar las soluciones, a saber

- EQUILIBRIO: la *admisibilidad estática*, por la que el estado de esfuerzos está equilibrado con las cargas
- COMPATIBILIDAD: la *admisibilidad cinemática*, por la que la geometría de colapso es compatible, y
- RESISTENCIA: que también podríamos denominar condiciones de *congruencia material* o *admisibilidad material*, (o *ecuaciones constitutivas*), por la que los esfuerzos son los que provocan la plastificación en las regiones en que se postula dicho estado, y menores a éstos en el resto de la estructura.

De este modo, la solución —única— al problema planteado se obtiene cuando confluyen las tres condiciones.

5.2. Modelos de análisis en rotura

5.2.1. Ecuaciones fundamentales

Una vez vistos los teoremas fundamentales del método, vamos a derivar procedimientos de solución, aplicados al estudio de las estructuras de barras, en las que podemos plantear tanto las condiciones de carga —y de equilibrio— como la cinemática de colapso —y su compatibilidad— en forma discreta, referidas a un número finito de secciones prefijadas en las que consideremos la posibilidad de aparición de rótulas o deformaciones plásticas.

Para ello vamos a reescribir las ecuaciones planteadas en los apartados anteriores, que estaban definidas suponiendo esfuerzos y movimientos distribuídos, y por tanto descritos mediante funciones, pasándolas al formato en el que se describen a través de un conjunto finito de valores[7].

- Usamos $\boldsymbol{F}$ para las cargas, que estarán equilibradas por los esfuerzos $\boldsymbol{f}$ de las secciones elegidas para representar el problema, siendo la condición de EQUILIBRIO:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f} \tag{5.2}$$

[7] Ver apartado 2.1

Hay que señalar que si hemos establecido a priori un dimensionado para la estructura, lo habitual será que no conozcamos inicialmente ni las cargas $\boldsymbol{F}$, que deben ser las de rotura, y que buscamos sean superiores o iguales a las aplicadas a la estructura, ni los esfuerzos que las equilibran $\boldsymbol{f}$, aunque si hemos definido cómo se representan, sí podremos establecer $\boldsymbol{H}$ sin dificultad. Una forma habitual de plantear el problema consiste en prefijar un vector de carga dado $\boldsymbol{F}_I$ y buscar el factor de carga γ correspondiente a la condición de equilibrio en el instante de la rotura: $\gamma \boldsymbol{F}_I = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}$. Volveremos sobre ello.

- Usamos $\boldsymbol{U}$ para los movimientos de la estructura necesarios para describir las posibles cinemáticas de colapso, de los que pueden deducirse por COMPATIBILIDAD las deformaciones plásticas $\boldsymbol{u}$ de las secciones implicadas en cada geometría de colapso, ignorando las deformaciones elásticas, que no variarán en el proceso. Para movimientos pequeños:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U} \tag{5.3}$$

  con $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}^T$ como sabemos que sucede si se representan de forma concordante tanto cargas y movimientos como esfuerzos y deformaciones. En dicha expresión, tanto $\boldsymbol{u}$ como $\boldsymbol{U}$ representan *velocidades* o diferencias de deformación y movimiento entre dos estados sucesivos en el movimiento de colapso.

- Definimos finalmente las condiciones de RESISTENCIA, las que identifican las condiciones de plastificación o, en la analogía usada para describir éstas, las que definen a la superficie límite de rotura, mediante un sistema de inecuaciones o desigualdades para los esfuerzos[8] en la forma de la ecuación 2.7:

$$\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{f} - \boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{0} \tag{5.4}$$

  Cada fila de la anterior expresión matricial contiene una expresión lineal que representa una de las condiciones límite correspondiente a los esfuerzos o combinaciones de esfuerzos $\boldsymbol{f}$ asociados a los coeficientes no nulos de dicha fila. La expresión 5.4 es, por lo tanto, una aproximación a las condiciones de plastificación que representa la posible superficie límite no lineal mediante un conjunto finito de condiciones lineales o hiperplanos. En dicha aproximación cada término de $\boldsymbol{r}$ representará, o bien una resistencia aislada —una capacidad resistente— si $\boldsymbol{\psi}$ tiene un único término no nulo en la fila considerada, o bien un coeficiente que establece un límite a las condiciones de interacción entre varias capacidades resistentes en el caso de que $\boldsymbol{\psi}$ tenga varios términos no nulos en dicha fila.

Es útil recordar, como vimos en el apartado 5.1.3, que los términos de cada fila de $\boldsymbol{\psi}$ representan —para módulo unitario— las componentes del versor perpendicular al correspondiente plano de rotura, siendo por ello $\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{f}$ las proyecciones de los esfuerzos sobre cada una de dichas direcciones mientras que los términos de $\boldsymbol{r}$ representan las distancias desde el origen, que corresponde al vector de esfuerzos nulo, hasta dichos planos, distancias medidas en las direcciones definidas por tales versores.

[8] representando usualmente las solicitaciones y las correspondientes resistencias en formas agregadas: en barras los usuales esfuerzos normal, cortante y momento y las condiciones de los correspondientes diagramas de interacción.

Por razón de la regla de flujo —apartado 5.1.2— las deformaciones en el proceso de rotura deben ser ortogonales a las variaciones de esfuerzos plásticos, es decir, deben ser perpendiculares a la superficie de rotura. Por lo tanto se describen de una de las dos maneras siguientes: si el estado límite se da para una sola de las condiciones descritas por las ecuaciones de resistencia, es decir, si sólo hay un plano activo en la situación de rotura considerada, se representará con un vector paralelo a uno de los versores de los planos que la aproximan; si la rotura corresponde a una arista o un vértice de la superficie considerada, es decir, si el límite se da simultáneamente para varias de las condiciones límite, se describirá con vectores obtenidos por combinación lineal de coeficientes positivos de los versores de los planos activos simultáneamente pues en ese caso la deformación puede orientarse en cualquiera de las direcciones del ángulo contenido entre las perpendiculares a los planos que confluyen en esa posición. Como el vector debe orientarse hacia el exterior de la superficie lo anterior puede expresarse en la forma siguiente:

- Condición de admisibilidad MATERIAL, expresada por la regla de flujo: en la condición de rotura la (velocidad de) deformación es ortogonal a la superficie límite.

  $$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p \tag{5.5}$$

  En dicha expresión, cada columna de $\boldsymbol{\psi}^T$ es uno de los versores de los hiperplanos que definen la superficie límite, y $\boldsymbol{\lambda}_p$ es una lista de multiplicadores (un vector columna) que tendrán valor positivo si el correspondiente hiperplano es activo, y valor nulo si no lo es. La expresión es efectivamente una forma de representar una combinación lineal de los versores de los planos activos —de las ecuaciones que expresan plastificaciones efectivas—, combinación que está situada en el cono que define las deformaciones posibles en el colapso si se restringen los $\boldsymbol{\lambda}_p$ a valores positivos.

Si multiplicamos escalarmente cada una de las ecuaciones (5.4) que expresa uno de los planos de la superficie límite por el correspondiente multiplicador tendremos sistemáticamente un valor nulo dado que, o bien el plano es activo y por lo tanto la correspondiente fila de la ecuación debe ser nula y el multiplicador no nulo, o bien el plano no es activo, y la fila será entonces no nula —y menor a cero— pero en ese caso deberá ser nulo el multiplicador.

Tenemos, pues, que los planos activos están asociados a la condición (de colapso) siguiente:

$$(\boldsymbol{\psi f} - \boldsymbol{r})^T \boldsymbol{\lambda}_p = 0 \tag{5.6}$$

Podemos aplicar finalmente el teorema cinemático, que establece que si en un movimiento de colapso que podamos imaginar —que sea admisible— se iguala el trabajo desarrollado por las cargas en dicho movimiento a la disipación de energía plástica que se produce en las secciones que deben plastificar en dicho movimiento, puede asegurarse que tales cargas corresponderán a una cota superior a las que efectivamente resiste la estructura. Esto puede expresarse en la forma

$$\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{F} \geq \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f} \tag{5.7}$$

En dicha expresión la situación de igualdad se dará si se cumplen también las condiciones del teorema estático, es decir, si las cargas y esfuerzos están en equilibrio y no hay región alguna del cuerpo en el que se supere la condición de resistencia.

5.2.2. Obtención de soluciones

Cinemática de colapso

Obtenemos ahora las ecuaciones que resuelven el problema desde la perspectiva cinemática. Para ello aplicamos la condición de admisibilidad material descrita por la regla de flujo 5.5 al desarrollo de la ecuación que caracteriza los planos de rotura activos 5.6, combinada con la condición dada por el teorema cinemático 5.7 obteniendo:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\lambda}_p - \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{\lambda}_p = 0\\ \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{\lambda}_p = 0\\ \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{U} - \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{\lambda}_p \geq 0\end{gathered}$$

Si añadimos la ecuación de compatibilidad 5.3 sustituyendo en ella las deformaciones por su valor tal como lo determina la regla de flujo 5.5 tendremos finalmente el conjunto de condiciones que caracteriza a la solución:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{U} \geq \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{\lambda}_p\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\lambda}_p\\ \boldsymbol{\lambda}_p \geq \boldsymbol{0}\end{gathered} \tag{5.8}$$

Las ecuaciones 5.8 expresan la afirmación del teorema cinemático y la condición de compatibilidad en función de las variables globales de carga y movimiento y de los multiplicadores que localizan las posiciones de rotura —y que expresan su deformación plástica, como se deduce de la primera ecuación, que mide energías disipadas— Las ecuaciones permiten deducir soluciones a problemas típicos de análisis plástico.

Si por ejemplo suponemos conocidas las resistencias $\boldsymbol{r}$, representamos la carga en función de un factor de carga γ en la forma $\boldsymbol{F} = \gamma\boldsymbol{F}_I$, para un vector de carga prefijado $\boldsymbol{F}_I$, y normalizamos el desplazamiento[9] de forma que ${\boldsymbol{F}_I}^T\boldsymbol{U} = 1$, tendremos que las ecuaciones anteriores equivalen al problema de hallar los $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{\lambda}_p$ que minimizan el factor de carga $\gamma = \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{\lambda}_p$ para las condiciones lineales dadas:

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{\lambda}_p} \gamma(\boldsymbol{\lambda}_p) = \min_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{\lambda}_p} (\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{\lambda}_p)\\ \boldsymbol{F}_I^T\boldsymbol{U} = 1\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\lambda}_p\\ \boldsymbol{\lambda}_p \geq \boldsymbol{0}\end{gathered} \tag{5.9}$$

Dicho problema no es más que un problema de programación lineal, resoluble con las herramientas de dicho campo de la matemática, y en particular con el algoritmo *simplex*[10].

[9] Ya hemos dicho que el desplazamiento en colapso suele medirse como *velocidad*, al tratarse de un proceso continuado e irrefrenable en el que cada incremento no es más que una amplificación del movimiento anterior, por lo que es habitual usar un factor de referencia común para todos los movimientos. Éstos se expresan como *modo*, o en forma adimensional, proporcional, siendo el factor común el que puede expresar la evolución de la deformación en el tiempo.

[10] El algoritmo, en sus diversas versiones, resulta ser uno de los más productivos de las teorías matemáticas del pasado siglo XX. Desarrollado por George B. Dantzig en 1947 para la planificación de actividades de la Fuerza Aérea de los EEUU, es actualmente uno de los elementos

Análogamente puede hacerse si las cargas derivan de la combinación de una parte constante y otra variable, en una forma como $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \gamma \boldsymbol{F}_I$; normalizando ahora la parte variable tendríamos

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{\lambda}_p} \gamma(\boldsymbol{\lambda}_p) = \min_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{\lambda}_p} (\boldsymbol{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p - \boldsymbol{F}_0^T \boldsymbol{U}) \\ \boldsymbol{F}_I^T \boldsymbol{U} = 1 \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p \\ \boldsymbol{\lambda}_p \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Cualquiera de los problemas anteriores propone obtener los movimientos que, manteniendo la compatibilidad, corresponden a la condición de colapso para el menor factor de carga que lleva la estructura a la rotura. La solución al problema de programación lineal —de minimización— permite obtener simultáneamente el factor de carga —que es la función *objetivo* del problema— y los vectores $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{\lambda}_p$ que definen, el primero los movimientos generalizados de la estructura en el colapso, el segundo los movimientos de las secciones representadas en el modelo de resistencia en dicho proceso de colapso, es decir las deformaciones plásticas de las secciones que rompen, marcando los planos activo.

Conocidos los movimientos, es posible reconstruir los esfuerzos de la estructura, dado que pueden obtenerse ecuaciones suficientes para ello. Efectivamente,

- el factor de carga identifica la carga actuante $\boldsymbol{F}$, y
- a las ecuaciones de equilibrio pueden añadirse ahora las de resistencia de las secciones *activas*, o que plastifican, que ahora son conocidas.

Vemos pues que puede plantearse el problema de obtener el factor de carga necesario para alcanzar el colapso plástico de la estructura dotada de un dimensionado conocido en un formato apto para su tratamiento con herramientas disponibles en los paquetes numéricos que se incluyen de forma habitual en gran parte de los programas de cálculo de propósito general.

Dualidad: Estática de colapso

Resulta de sumo interés analizar ahora las implicaciones que las condiciones de dualidad comunes a todos los problemas de programación lineal suponen para el problema que estamos analizando[11].

Para ello vamos a reescribir las ecuaciones 5.9 en otro formato más compacto, unificando la expresión de las restricciones para todas las variables del problema.

canónicos básicos de las teorías económicas y de la planificación de las grandes corporaciones industriales. Véase [Dantzig, 1963], [Gass, 1969]. La creación posterior de algoritmos capaces de competir con él, o de superarle en eficacia, como los de punto interior [Karmarkar, 1984], no obscurece de ningún modo su importante papel. La generalidad de uso del algoritmo hace que sea una de las herramientas estándar en los paquetes numéricos informáticos disponibles en muchos contextos, tanto especializados, como de propósito general, sea por estar directamente contenido en el paquete básico —como en las herramientas de álgebra simbólica como Maple, Mathematica o Maxima— sea por estar disponible como complemento o rutina descargable —como en versiones antiguas del paquete de ofimática OpenOffice— Está disponible en las versiones más recientes de las hojas de cálculo:

Excel 07 >Datos >Análisis >Solver ; OpenOffice 3.x >Herramientas >Solver

[11] Para más detalles véase cualquier texto de programación lineal, o de programación lineal y no lineal —de optimización— como pueden ser [Luenberger, 1989] o [Nash and Sofer, 1996].

Tendremos el problema allí enunciado, que la literatura matemática denomina *primal*:

$$\begin{gathered}\text{mín}\left(\gamma = \begin{bmatrix}\boldsymbol{r}^T & \boldsymbol{0}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}_p \\ \boldsymbol{U}\end{bmatrix}\right) \\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}^T & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0}^T & \boldsymbol{F}_I^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}_p \\ \boldsymbol{U}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} \\ 1\end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\lambda}_p \geq \boldsymbol{0}\end{gathered} \tag{5.11}$$

Se trata en éste, como hemos visto, de determinar la configuración de colapso que hace mínima la disipación, respetando las condiciones de compatibilidad, y para un formato normalizado en la velocidad de desplazamiento.

El problema *dual* del anterior, de acuerdo a los principios de las teorías de programación lineal no es otro que el

$$\begin{gathered}\text{máx}\left(\Gamma = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}^T & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{f} \\ \Gamma\end{bmatrix}\right) \\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{F}_I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{f} \\ \Gamma\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \\ \Gamma \geq 0\end{gathered} \tag{5.12}$$

En dicho problema, las variables de *decisión* pueden identificarse con los esfuerzos $\boldsymbol{f}$ y el factor de carga Γ. El problema propone hallar los esfuerzos correspondientes al máximo factor positivo Γ que, aplicado a las cargas, permite que éstas alcancen el equilibrio con los esfuerzos, sin que éstos superen las condiciones de resistencia. Puede comprobarse que, efectivamente, los grupos de ecuaciones que corresponden a las restricciones son precisamente las de resistencia y las de equilibrio[12].

Este enfoque permite por tanto obtener directamente tanto los esfuerzos como el factor de carga de rotura de la estructura para la configuración de cargas elegida $\boldsymbol{F}_I$.

En general el problema de minimización

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{c}^T \cdot \boldsymbol{x}\right) \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\end{gathered}$$

tiene como dual el de maximización

$$\begin{gathered}\max_{\boldsymbol{y}}\left(\boldsymbol{b}^T \cdot \boldsymbol{y}\right) \\ \boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}.\end{gathered}$$

El problema dual puede generarse considerando un conjunto de variables positivas $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$. Para cualquier combinación de éstas podemos asegurar que $\boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{b}$ y, si elegimos valores tales que $\boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{c}^T$, al ser las variables $\boldsymbol{x}$ positivas tendremos

$$\boldsymbol{c}^T \cdot \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{b}^T \cdot \boldsymbol{y}$$

con lo que $\boldsymbol{b}^T \cdot \boldsymbol{y}$ aporta una cota inferior a $\boldsymbol{c}^T \cdot \boldsymbol{x}$ cuya maximización genera precisamente el problema dual. Puede observarse que ambos problemas acotan superior e inferiormente la magnitud escalar $\boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$ y puede demostrarse que ambos problemas tienen el mismo límite.

[12] Cabe señalar que aunque tras aplicar la dualidad en la forma general las ecuaciones de equilibrio quedan formuladas en términos de inecuación, pueden restringirse con facilidad a igualdades estrictas

Se trata de la formulación directa del problema de maximización que se deriva de aplicar el teorema estático, puesto que se formula explícitamente tanto el equilibrio como la no violación de la condición de resistencia, lo que asegura que la carga de rotura es superior a la considerada. Esto justifica la formulación del problema como un problema de maximización: se trata de hallar la mayor carga que cumple simultáneamente con ambas condiciones.

La confluencia de las soluciones de ambos problemas 5.11 y 5.12 en una solución única, con $\text{mín}(\gamma) = \text{máx}(\Gamma)$, cota superior la primera, cota inferior la segunda, puede identificarse con el teorema de unicidad, aunque también es consecuencia de los teoremas paralelos de dualidad descritos en la literatura de la programación lineal.

Resulta finalmente muy interesante reiterar que γ expresa la energía disipada por las resistencias en el movimiento de colapso normalizado: es la disipación plástica en dicho movimiento. De la expresión con la que se calcula en 5.9 puede verse con claridad que la mejora en la carga de rotura —en el factor de carga— será más eficaz si se interviene mejorando las resistencias de $\boldsymbol{r}$ para las que las deformaciones $\boldsymbol{\lambda}_p$ resulten mayores. Dicha información, claramente visible en la formulación cinemática del problema no está disponible, en cambio, en la solución que aporta la formulación estática del problema.

Nótese que si aplicamos la dualidad a la segunda forma, ecuación 5.10, de plantear el problema, llegaremos a una solución estática en la que el factor de carga se aplicará sólo a la parte variable de la carga

$$\begin{gathered} \max_{\boldsymbol{f},\Gamma} (\Gamma) \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{F}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ -\boldsymbol{F}_0 \end{bmatrix} \\ \Gamma \geq 0 \end{gathered} \tag{5.13}$$

Factor de carga *robusto*

Vimos en el apartado 5.1.3 que podíamos tratar el problema de la seguridad como medida del alejamiento del vector de esfuerzos al punto más próximo de la superficie de rotura, descomponiendo para ello el vector $\boldsymbol{f}$ en la suma de un término *central* más uno *adicional*: $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_c + \boldsymbol{f}_a$. El término central buscará alcanzar el punto más lejano a la superficie límite, el punto de máxima seguridad para la configuración estructural dispuesta, y el adicional representará la desviación respecto a éste que suponen los esfuerzos debidos a las cargas reales que, por tanto, los acercan a dicha superficie límite. Dado que las ecuaciones de equilibrio permiten pasar de esfuerzos a cargas, a pesar de que en problemas no lineales no se cumple el principio de superposición —ligado al estado completo en tensiones y deformaciones— sí es posible descomponer y superponer estados de equilibrio, por lo que si somos capaces de determinar ambas partes del esfuerzo, dichas componentes nos permiten determinar dos componentes en las cargas $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_a$, con $\boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}_c$ y $\boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}_a$, lo que puede permitir determinar con facilidad el que hemos denominado *coeficiente robusto de seguridad*. Para ello habrá que resolver el problema descomponiendo la estática del colapso entre dos partes, una constante correspondiente al *centro* o situación de carga de seguridad máxima, y otra variable medida como alejamiento de esa situación central.

Debemos pues ser capaces de obtener s en primer lugar el punto[13] a que corresponde el *centro* o lugar más lejano a la superficie de rotura.

Partimos de la estática de colapso, con las ecuaciones de resistencia en la forma de 5.4:

$$\boldsymbol{\psi f} - \boldsymbol{r} \leq \mathbf{0}$$

Cada una de dichas ecuaciones, en la escala adecuada, contiene la fila de $\boldsymbol{\psi}$ que representa el versor del plano límite establecido por dicha ecuación, y el término de $\boldsymbol{r}$ que representa en ese caso la distancia de dicho plano al origen. De este modo, la diferencia a cero representa precisamente el margen disponible en la misma escala de $\boldsymbol{r}$. Si introducimos para cada ecuación i la variable de *holgura* $z_i \geq 0$, de tal modo que la inecuación se exprese en términos de igualdad ($\psi_{ij} f_j + z_i - r_i = 0$ para la ecuación i, o $\boldsymbol{\psi f} + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{r} = \mathbf{0}$ en formato que representa el conjunto de todas ellas) resultará que los términos de $\boldsymbol{z}$ representan precisamente las *distancias* o márgenes, las holguras disponibles en el efecto de los esfuerzos $\boldsymbol{f}$ hasta alcanzar el límite de resistencia $\boldsymbol{r}$ establecido por los diferentes planos que definen la superficie límite. Determinar el *centro* no es por ello otra cosa que obtener el conjunto de esfuerzos $\boldsymbol{f}_c$ que cumpliendo dichas ecuaciones maximizan la menor de las holguras.

Es útil la analogía geométrica de las ecuaciones: si pensamos en el caso bidimensional representado en la figura 5.8, cada inecuación expresa una recta límite que, junto con las demás, define el polígono que acota el recinto *seguro*, y si consideramos las igualdades, los valores de z_i describen para cada condición de resistencia la holgura de seguridad. Si a cada esfuerzo asociamos el menor valor de todos los z_i estaríamos dibujando un conjunto de *curvas de nivel* de la holgura de seguridad en el recinto. Si extendemos la representación bidimensional con una dimensión z adicional correspondiente precisamente al mínimo de z_i para el esfuerzo considerado el polígono que define el recinto pasa a ser el corte plano de un poliedro en el que la dimensión adicional representa dicho margen u holgura. El interior de dicho poliedro representa valores en dicho margen menores a los realmente existentes para el correspondiente esfuerzo, margen que está precisamente definido en la superficie del poliedro, en el primero de los planos alcanzados. El exterior del poliedro representa situaciones en las que no hay seguridad para algunas de las condiciones originales. El problema es por tanto buscar el máximo en dicho margen, y por tanto el máximo en la cota de z en dicho poliedro.

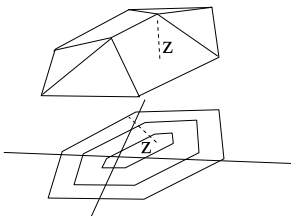


Figura 5.8: Centro de la región de resistencia

[13] o la región, en caso de ser ésta *paralela* a la región más próxima de la superficie de rotura. Más adelante analizamos el problema con más detalle.

De este modo el problema contiene ahora una variable de decisión más: a las $\boldsymbol{f}_c$ se debe añadir la z, cuyo valor debe ser en todo caso menor o igual al expresado en todas y cada una de las ecuaciones anteriores, puesto que debe encontrarse en el interior del poliedro descrito.

En lenguaje más formal, se trata de buscar el punto y la holgura al que corresponde la mayor de las holguras posibles en las ecuaciones de resistencia, lo que puede expresarse como

$$\begin{gathered} \operatorname*{máx}_{\boldsymbol{f}}(z) \\ \boldsymbol{\psi f} + z \cdot \mathbf{1} - \boldsymbol{r} \leq \mathbf{0} \end{gathered} \tag{5.14}$$

donde $\mathbf{1}$ es una matriz columna de valores unidad de igual número de filas que el de ecuaciones. La solución con *simplex* a dicho problema determina un punto $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_c$ que corresponderá a un punto de esfuerzos de distancia máxima a la superficie de rotura.

Hay que tener en cuenta que el algoritmo *simplex* determina siempre un vértice, cuando puede ser que la región central resulte ser más amplia en caso de ser paralela al plano de rotura más cercano. En este caso al descomponer el vector de esfuerzo en la parte *central* más la *adicional* puede resultar que la componente *adicional* no sea ortogonal a dicho plano límite, sino oblicua al mismo, por haberse seleccionado, de entre la región central *paralela* al plano límite, un punto —extremo— en vez del que resultaría más cercano al del esfuerzo que se pretende descomponer. En dicho caso, y si nos ceñimos a dicho plano límite, resultaría de todos modos que, por el teorema de Tales, las proporciones entre la holgura y la propia componente adicional son las mismas en el vector oblicuo que las que mantienen en el vector ortogonal que sería solución correcta del problema. De este modo el *margen de seguridad* que se obtendría sería correcto, aunque pueda no serlo el punto representativo de la rotura obtenido al ampliar en dicho margen la diferencia entre el estado inicial y el estado *central* determinado. Esta cuestión exigirá un desarrollo ulterior.

Resuelto este primer problema, tendremos como aproximación al margen robusto de seguridad el que resuelve un segundo problema definido a partir de la descomposición.

Se tratará ahora de buscar el límite a las cargas $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_c + \Gamma_c \boldsymbol{F}_{a1}$ con $\boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}_c$ y siendo $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}^T$. Las cargas $\boldsymbol{F}_c$ serán las que corresponden a la máxima seguridad posible para la estructura, las cargas $\boldsymbol{F}_{a1}$ designarán la componente que se aleja de dicha seguridad máxima, y Γ_c el coeficiente o margen de seguridad buscado. Las ecuaciones de equilibrio globales en la situación de rotura estarán ahora en la forma $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{f}_a = \boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_c = \Gamma_c(\boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_c)$ partiendo de las cargas originales $\boldsymbol{F}_I = \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_{a1}$ sabiendo que deberá ser $\boldsymbol{F}_{a1} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{f}_{a1}$ para los esfuerzos *diferencia* o *adicionales*.

Por otro lado, las ecuaciones de resistencia pueden escribirse en la forma $\boldsymbol{\psi f} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{f}_c + \boldsymbol{f}_a) \leq \boldsymbol{r}$, es decir $\boldsymbol{\psi f}_a \leq (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\psi f}_c)$.

Tenemos por tanto el problema de maximización

$$\begin{gathered}\max_{\boldsymbol{f}_a}(\Gamma_c)\\ \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{f}_a \leq \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{f}_c\\ \begin{bmatrix}-\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{F}_I - \boldsymbol{F}_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_a\\ \Gamma_c\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}\\ \Gamma_c \geq 0\end{gathered} \tag{5.15}$$

que también puede escribirse como

$$\begin{gathered}\max_{\boldsymbol{f}_a}\left(\Gamma_c = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}^T & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_a\\ \Gamma_c\end{bmatrix}\right)\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{F}_I - \boldsymbol{F}_c\\ \boldsymbol{B}^T & -\boldsymbol{F}_I + \boldsymbol{F}_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_a\\ \Gamma_c\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{f}_c\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\\ \Gamma_c \geq 0\end{gathered} \tag{5.16}$$

siendo $\boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{f}_c$.

Se trata nuevamente de un problema de maximización que puede resolverse con el mismo algoritmo, y que como se ve, es idéntico al 5.12 salvo por el desplazamiento a la posición *central* representada por $\boldsymbol{f}_c, \boldsymbol{F}_c$.

Si recordamos la figura 5.6, que redibujamos ahora en la 5.9, podemos ver que las ecuaciones 5.12 nos llevan a la primera aproximación del punto C, dado que su objeto es explorar ampliaciones al vector de cargas original, y las 5.15 nos llevarían a la segunda, puesto que buscan ampliaciones a la componente del vector de cargas desviado respecto del *central*. Sin embargo el que llamábamos factor de carga *robusto* en la sección 5.1.3 sería el que corresponde a alcanzar el punto marcado con 3. La reflexión necesaria para determinar este último y valorar su relación con el numerado con 2 supera, sin embargo, las limitaciones de espacio de este apartado, por lo que nos conformamos con el último obtenido.

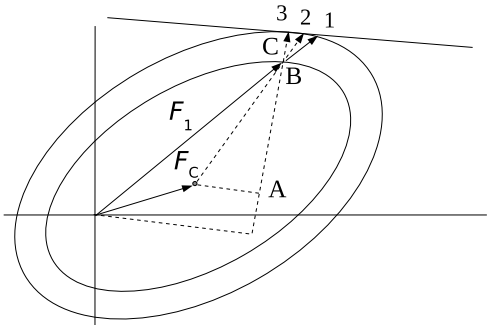


Figura 5.9: Criterios de seguridad.

5.2.3. Cargas de rotura y mecanismos de colapso

Hemos visto en apartados anteriores que el problema de rotura puede formularse desde la perspectiva cinemática o del límite superior, o desde la perspectiva

estática, o del límite inferior. Cuando ambos límites coinciden se cumplen las condiciones del teorema de unicidad, obteniéndose la carga de rotura. Si recordamos ambos enfoques teníamos, en el primero, el problema de minimizar γ para las variables de decisión $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\lambda}$, en la forma de la ecuación 5.9

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{\lambda}} \gamma(\boldsymbol{\lambda}) &= \min_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{\lambda}} (\boldsymbol{r}^T \boldsymbol{\lambda}) \\ \boldsymbol{F}_1^T \boldsymbol{U} &= 1 \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{U} &= \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{5.17}$$

y en el segundo el problema de maximizar Γ en la forma de la ecuación 5.12

$$\begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{f},\Gamma} \Gamma \\ &\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{r} \\ &\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{f} = \Gamma \boldsymbol{F}_I \\ &\Gamma \geq 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

La solución del problema, cuando $\min(\gamma) = \max(\Gamma)$ nos arroja un conjunto de ecuaciones que podemos resumir ahora, usando para la carga de rotura $\boldsymbol{F} = \gamma \boldsymbol{F}_I$, y recordando la definición de γ en el problema cinemático:

Equilibrio	$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{f}$
Compatibilidad	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$
Resistencia	$\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{r}$
Regla de flujo	$\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{u}$
Colapso	$(\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{f} - \boldsymbol{r})^T \boldsymbol{\lambda} = 0$
Disipación	$\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{r}$

Podemos generalizar las soluciones obtenidas en las anteriores ecuaciones si consideramos que las cargas $\boldsymbol{F}$ corresponden a las de rotura para una de las direcciones posibles de la acción, la definida por la carga inicial $\boldsymbol{F}_I$ que se ha hecho crecer hasta el máximo valor $\boldsymbol{F}$ que la estructura es capaz de soportar para esa *orientación* o combinación de cargas.

Si analizásemos el problema con otra *orientación* inicial $\boldsymbol{F}_{II}$ llegaríamos a otra solución límite y así sucesivamente, de modo que podemos imaginar la envolvente para todas ellas, definiendo así la capacidad de carga generalizada de la estructura con expresión análoga a la que hemos usado para la del conjunto de las secciones

$$\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{F} \leq \boldsymbol{R} \tag{5.19}$$

La ecuación no es más que la definición de una superficie límite en el espacio de las cargas que, por las ecuaciones de equilibrio, pueden considerarse como un *agregado* de las solicitaciones, espacio para el que la existencia de dicha superficie límite y el cumplimiento en ella de la regla de ortogonalidad está probada, de acuerdo con lo establecido en el apartado 5.1.1.

Podemos por ello postular para la estructura completa la existencia de los parámetros globales $\boldsymbol{\Lambda}$, donde cada uno de ellos representará uno de los posibles mecanismos de colapso, activo si es no nulo, e inactivo en caso de anularse.

La condición de colapso quedaría representada por la ecuación

$$(\boldsymbol{\Psi F} - \boldsymbol{R})^T \boldsymbol{\Lambda} = 0 \tag{5.20}$$

Para cada uno de los mecanismos de colapso globales Λ_j resultará mera cuestión de geometría la determinación de las secciones que plastifican, es decir, la determinación de los multiplicadores activos λ_{ij} y su valor: puesto que el producto escalar $\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{r}$ expresa la disipación plástica que se produce en las secciones que plastifican, o rótulas, en el mecanismo, deberá igualar a la disipación plástica considerada en la estructura en su conjunto, que se expresaría con $\boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{R}$, lo que permite relacionar la geometría de colapso general descrita por $\boldsymbol{\Lambda}$ con las rotaciones o aplastamientos descritos por $\boldsymbol{\lambda}$. Para pequeños desplazamientos podrá expresarse $\boldsymbol{\lambda}$ como expresión lineal de $\boldsymbol{\Lambda}$, en la forma

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{L\Lambda} \tag{5.21}$$

que expresa la compatibilidad entre las descripciones local y global de la configuración o mecanismo de rotura.

Ahora tendremos para la condición de colapso

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\psi f} - \boldsymbol{r})^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{\lambda} = \\ \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{L\Lambda} - \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{L\Lambda} = (\boldsymbol{f}^T \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{L} - \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{L})\boldsymbol{\Lambda} = \\ (\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{\psi f} - \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{r})^T \boldsymbol{\Lambda} = 0\end{gathered}$$

Si comparamos la última expresión con la ecuación 5.20, si en esta última sustituímos $\boldsymbol{F}$ por $\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{f}$, considerando que $(\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{r})^T \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{L\Lambda} = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{\Lambda}$ y que las dos expresiones deben ser ciertas para todas las combinaciones de rotura $\boldsymbol{f}$ resultarán las identidades

$$\boldsymbol{R} \equiv \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{r} \tag{5.22}$$

$$\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{\psi} \equiv \boldsymbol{\Psi B}^T \tag{5.23}$$

La primera de ellas expresaría la forma de transformar las capacidades resistentes, obteniendo las representadas desde la perspectiva global de la estructura —las diferentes cargas de rotura— a partir de las capacidades resistentes de las secciones de ésta.

Dichas expresiones nos permiten cerrar el conjunto de relaciones que caracterizan las configuraciones y las cargas de rotura desde la doble perspectiva, sea interna, sea global, de la estructura, con las variables y ecuaciones siguientes

	local	**global**
fuerzas	solicitaciones $\boldsymbol{f}$	cargas $\boldsymbol{F}$
movimientos	deformaciones $\boldsymbol{u}$	desplazamientos $\boldsymbol{U}$
capacidades	resistencias $\boldsymbol{r}$	cargas límite $\boldsymbol{R}$
configuraciones	*rótulas* $\boldsymbol{\lambda}$	mecanismos $\boldsymbol{\Lambda}$
COM-EQU	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{BU}$	$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{f}$
CNF-CAP	$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{L\Lambda}$	$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{r}$
Resistencia	$\boldsymbol{\psi f} \leq \boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{\Psi F} \leq \boldsymbol{R}$
Regla de flujo	$\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{U}$
Colapso	$(\boldsymbol{\psi f} - \boldsymbol{r})^T \boldsymbol{\lambda} = 0$	$(\boldsymbol{\Psi F} - \boldsymbol{R})^T \boldsymbol{\Lambda} = 0$
Disipación	$\boldsymbol{f}^T \boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{\Lambda}$

a las que debe añadirse la 5.23 para cerrar el conjunto.

Todo ello puede esquematizarse en el diagrama siguiente en el que resulta evidente la similitud al que sintetiza el modelo elástico representado en 2.19:

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{u} & \longleftarrow & \text{COMPATIBILIDAD}(\boldsymbol{B}) & \longleftarrow & \boldsymbol{U} \\
 & \nwarrow \boldsymbol{\psi}^T & \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{L} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Psi}^T & \boldsymbol{\Psi}^T \nearrow & \\
\downarrow & \boldsymbol{\lambda} \downarrow & \longleftarrow \boldsymbol{L} \longleftarrow & \downarrow \boldsymbol{\Lambda} & \downarrow \\
\text{Tr. interno} & = \text{Disipación interna} & \leq \text{Disipación externa} & = & \text{Tr. externo} \\
\uparrow & \boldsymbol{r} \uparrow & \longrightarrow \boldsymbol{L}^T \longrightarrow & \uparrow \boldsymbol{R} & \uparrow \\
 & \nearrow \boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{\Psi} \nwarrow & \\
\boldsymbol{f} & \longrightarrow & \text{EQUILIBRIO}(\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}^T) & \longrightarrow & \boldsymbol{F}
\end{array}
\tag{5.24}
$$

Cabe señalar que el conjunto de relaciones $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{L}$ desempeñan en el análisis en rotura un papel comparable al desempeñado en análisis elástico por las relaciones $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{B}$.

5.3. Problemas de dimensionado

5.3.1. Introducción

Una aplicación habitual de las propiedades de los modelos en rotura es la de determinar las resistencias requeridas para soportar con seguridad un sistema de cargas conocido $\boldsymbol{F}$ mediante una configuración estructural hiperestática, para la que el sistema de ecuaciones de equilibrio $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}$ resultaría insuficiente (por ejemplo por haber sólo m ecuaciones —m términos en el vector $\boldsymbol{F}$— para n incóngnitas —n términos para el vector $\boldsymbol{f}$— con $m < n$. Se trataría de una estructura con grado de hiperstatismo $n - m$.

Sin embargo, si buscamos diseñar las resistencias que hacen a la estructura estrictamente resistente para dichas cargas en la situación de colapso, pueden añadirse al sistema ecuaciones (condiciones) adicionales estableciendo un conjunto de secciones para las que se alcanza la condición de plastificación, y añadiendo incógnitas adicionales correspondientes a los valores de resistencia requerida en dichas secciones.

De este modo, si añadimos k incógnitas adicionales de resistencia, aumentará a $n - m + k$ el número de ecuaciones necesarias a añadir a las de equilibrio para constituir un sistema ampliado resoluble $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{H}'\boldsymbol{f}'$, y dichas ecuaciones deberán ser de dos tipos. Por un lado condiciones por las que la estructura alcanza una configuración de rotura —se transforma en mecanismo— lo que supone un número de $n - m + 1$ condiciones. Todas ellas serán condiciones de igualdad entre el esfuerzo y la resistencia límite de cada sección que suponemos que plastifica. Pueden representarse como $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{f} - \boldsymbol{r}_{sp} = 0$, donde $\boldsymbol{r}_{sp}$ son los valores representativos de las resistencias de las secciones que suponemos que plastifican, y $\boldsymbol{\varphi}$ es la matriz identidad si no consideramos condiciones de interacción entre los esfuerzos en las rótulas, o, por lo contrario, una matriz para la que algunas filas expresan precisamente los coeficientes del correspondiente plano de interacción. Aunque volveremos sobre esto, considérese por el momento que la plastificación está asociada a uno sólo de los parámetros de esfuerzo de la sección —el momento flector en rótulas plásticas en flexión— con $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{I}$. El resto de las condiciones, en número $n - m + k - (n - m + 1)$ es decir $k - 1$ condiciones, serán ecuaciones que deben relacionar entre sí las distintas resistencias, que deberán por tanto

mantener proporciones prefijadas entre sí. Podemos suponer para ello que las resistencias $\boldsymbol{r}_{sp}$ de las *rótulas* están descritas a partir de un conjunto reducido de lo que podríamos llamar *resistencias básicas* en la forma $\boldsymbol{r}_{sp} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{r}_b$. Como el número de incógnitas de resistencia era k y las condiciones que las ligan $k-1$, resulta que el problema se representa con una sola resistencia básica de la que dependerán todas las demás, a través de criterios prefijados a través de $\boldsymbol{d}$. Dicho sistema ampliado puede representarse de la forma siguiente, si añadimos las nuevas ecuaciones al principio:

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{H}'\boldsymbol{f}'$$
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\varphi} & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ r_b \end{bmatrix}$$

Resuelto el sistema ampliado, deberá asegurarse que todas las secciones se dimensionan con resistencias iguales o mayores a los esfuerzos que se derivan de la solución $\boldsymbol{f}, r_b$, reconstruyendo por tanto el sistema equilibrado completo y asegurando de este modo que se cumplen las condiciones del teorema estático a fin de que la estructura sea capaz de soportar la carga.

Se trata por tanto de una estrategia de dimensionado en la que la adecuada elección de la posición de las secciones que configuran el mecanismo de colapso, así como la adecuada proporción entre las resistencias usadas para dichas secciones, son de gran importancia para asegurar un buen diseño, por lo que la experiencia puede resultar decisiva.

Si pensamos en añadir más posiciones posibles para las rótulas (ampliando el tamaño del vector $\boldsymbol{r}_{sp}$, pero añadiendo a cambio la incertidumbre sobre cuáles de ellas serán las efectivas en el colapso) o relajar la dependencia entre los valores de las mismas (aumentando por tanto el número de resistencias básicas $\boldsymbol{r}_b$), pasaremos a una situación en la que además de que dejen de coincidir el número de incógnitas con el de ecuaciones, éstas pasan ahora a ser inecuaciones para poder manejar la incertidumbre en la posición de las rótulas. Todo ello requiere de algunos recursos más.

Presentamos pues una versión más formal, a la que dedicamos el resto de este apartado.

5.3.2. Dimensionado de secciones

Empezaremos considerando el problema de dimensionado a partir de las ecuaciones que usábamos en el enfoque estático, pero ahora considerando que todas las resistencias son también incógnitas a decidir o determinar.

Tenemos pues las ecuaciones de resistencia 5.4 y de equilibrio 5.2, o con más precisión las empleadas en 5.12, donde $\boldsymbol{F}_I = \boldsymbol{F}$ y $\Gamma = 1$, siendo datos los valores de las cargas, y suponiendo conocidos los coeficientes de las matrices tanto de equilibrio como de resistencia por ser conocida la configuración espacial de la estructura. Ahora son incógnitas del problema tanto las solicitaciones como las resistencias.

Podemos reescribir dichas ecuaciones para aislar las incógnitas,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} & -\boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{F} \end{bmatrix}$$

(donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad), y cambiando el sentido de las inecuaciones podemos finalmente enunciar el problema de dimensionado como un problema de minimización —de coste— en la forma

$$\begin{gathered}\min_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{r}} \left(C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c}_r^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{0} \end{gathered} \tag{5.25}$$

Las ecuaciones anteriores expresan que los efectos de los esfuerzos deben ser menores que las resistencias, positivas, destinadas a soportarlos, y que sus resultantes deben ser mayores que las cargas aplicadas a la estructura[14]. El problema de minimización se asocia a establecer factores de coste —lineales— asociados a las resistencias, y la decisión, por tanto, se toma minimizando el coste total.

El problema resulta resoluble nuevamente por el procedimiento *simplex*, si bien cabe hacer algunas advertencias

- En primer lugar hemos supuesto conocidos los coeficientes de $\boldsymbol{\psi}$ cuando en rigor están asociados a los diagramas de interacción y, por tanto, a las resistencias usadas. Sin embargo, si empleamos el criterio de que las filas representan los versores de los planos de la superficie límite, dichos versores, y por tanto todas las filas, tienen módulo unidad y son por tanto independientes de escala. Por otro lado es posible considerar que las formas de interacción en formato adimensional sean semejantes o suficientemente estables para series uniformes de secciones. Podemos por ello dar por (suficientemente) bueno el supuesto[15].

- En segundo lugar al definir las incógnitas de resistencia en la forma descrita, se están independizando de hecho los criterios de diseño para todas ellas, por lo que su selección no está correlacionada y el algoritmo buscará el mínimo en formas que usualmente violarán criterios de tipo constructivo o ciñéndose estrictamente a las cargas descritas, e ignorando el hecho de que el modelo de cargas es una simplificación de las diferentes alternativas —por ejemplo sólo se representa la carga horizontal en un sentido—. Para

[14]En este formato las ecuaciones están escritas en forma de desigualdades. En determinadas condiciones la solución puede no corresponder, por tanto, a la igualdad estricta en las ecuaciones de equilibrio. Eso sucede, por ejemplo en problemas de varias hipótesis, como los reseñados un poco más adelante en 5.28. Puede, por supuesto, formularse la condición de igualdad estricta para el equilibrio, aunque las precisiones técnicas necesarias tal vez son excesivas e innecesarias para este texto, si bien son análogas a las de otros problemas más clásicos de programación lineal.

[15]De hecho el supuesto sólo se cumple exactamente para series bastante restringidas de secciones: en particular, si consideramos los casos de interacción momento–normal que corresponden a los problemas habituales de flexocompresión, la *estabilidad* propugnada se da sólo en series que mantengan constante el brazo plástico —el cociente entre el módulo plástico y el área— El enfoque propuesto es, por tanto, sólo una aproximación a un problema en rigor no lineal cuya solución se puede aproximar muy rápidamente —en muy pocos pasos, dado que los dimensionados reales corresponden a series discretas de secciones con saltos relativamente bruscos— por la sucesión de soluciones descritas en la forma de la ecuación 5.25. El desarrollo de las posibilidades de dicho enfoque, tal y como se presenta más adelante, justifica suficientemente esta suposición, que sería innnecesaria en un proceso iterativo

abordar este problema lo apropiado es obtener las resistencias $\boldsymbol{r}$ a partir de un conjunto más limitado de resistencias básicas combinadas por criterios de diseño de carácter tipológico o constructivo —por ejemplo todos los pilares interiores de una planta regular tienen la misma sección, al igual que los exteriores que tendrán otra— es decir usando como variables de diseño ese conjunto básico $\boldsymbol{r}_b$ desde el que se establecen, o dimensionan todas y cada una de las resistencias;

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{r}_b \tag{5.26}$$

- En tercer lugar[16] los coeficientes de coste pueden suponer una cierta dificultad, dado que deben suponerse lineales, cuando no lo son en la mayor parte de los problemas. Sin embargo el problema es de relevancia sólo relativa pues, en primer lugar, las restricciones a las resistencias establecidas de acuerdo a la advertencia anterior ejercen una influencia de mucho mayor peso, lo que hace que los diseños obtenidos resulten muy robustos frente a cambios leves en la definición de los costes. Por otro lado su influencia sólo afectará en el sentido de elegir diseños diferentes a los que corresponderían a los óptimos absolutos, aunque se tratará en todo caso de diseños seguros que, al estar en regiones cercanas a los óptimos —usualmente muy tendidas— tendrán diferencias de coste poco relevantes. Pueden por ello usarse coeficientes aproximados sin dificultad ninguna.

Haciendo honor a la segunda de las advertencias, el problema puede quedar reformulado usando la expresión 5.26 en la forma

$$\begin{gathered} \min_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{r}_b} \left(C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c}_{rb}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{r}_b \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{r}_b \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{r}_b \geq \boldsymbol{0} \end{gathered} \tag{5.27}$$

Podría, alternativamente al procedimiento anterior, añadirse al sistema inicial un conjunto de restricciones adicionales que liguen las resistencias mediante igualdades o desigualdades, con lo que se podrían añadir las restricciones de elemento mínimo a las piezas a dimensionar, lo que sigue siendo tratable por el mismo algoritmo de solución.

La realidad de los problemas estructurales impone que las estructuras han de ser seguras no para un sistema único de cargas, sino para un número finito de hipótesis de carga alternativas. De este modo, los problemas han de extenderse para que las resistencias sean suficientes para la totalidad de éstas, lo que puede hacerse conceptualmente sin dificultad alguna, aunque aumentando en buena medida el coste computacional correspondiente.

Por ejemplificar el procedimiento, si la estructura debe responder frente a dos sistemas de cargas independientes $\boldsymbol{F}_I, \boldsymbol{F}_{II}$ a los que corresponderán solicitaciones $\boldsymbol{f}_I, \boldsymbol{f}_{II}$ que deber ser admisibles para las resistencias pásticas que

[16] aunque con bastante menor importancia que los anteriores en los problemas manejados por el autor

hayan de disponerse $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{r}_b$, el problema puede formularse como

$$\begin{gathered}
\min_{\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{r}_b} \left(C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c}_{rb}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_I \\ \boldsymbol{f}_{II} \\ \boldsymbol{r}_b \end{bmatrix} \right) \\
\begin{bmatrix} -\boldsymbol{\psi} & \mathbf{0} & \boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{B}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_I \\ \boldsymbol{f}_{II} \\ \boldsymbol{r}_b \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{F}_I \\ \boldsymbol{F}_{II} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{r}_b \geq \mathbf{0}
\end{gathered} \tag{5.28}$$

De este modo, los métodos de análisis plástico se han extendido a un nuevo tipo de problemas, que supera ampliamente los abordados por el análisis, y que responde a una componente sustantiva de las actividades que forman parte del Proyecto.

5.4. Aplicaciones

Aunque, como ya se ha dicho, una aplicación esencial de los anteriores teoremas —en particular del teorema del límite inferior, o estático— es la de validar los resultados de los análisis elásticos habituales pese a la inexactitud e incongruencia de algunos de los datos empleados, o a la no consideración de los estados de tensión iniciales *parásitos*[17] previos a la carga, pueden encontrarse muchos ejemplos en los que su sencillez justifica sobradamente su aplicación. Vamos a recorrer los ejemplos ya usados en el anterior capítulo destinado al análisis por métodos elásticos, revisando ahora los métodos plásticos.

5.4.1. Estructuras de barras

Viga continua

Son habituales los análisis en rotura de vigas continuas, basados en el teorema estático. Para ello basta determinar leyes de momentos en equilibrio —a menudo igualando momentos positivos y negativos en tramos interiores pero asegurando, obviamente, la continuidad del diagrama en los vanos contiguos— y asegurar resistencia suficiente para todas las secciones. Cabe señalar que en dicho enfoque resulta arbitraria la elección de los momentos sobre los apoyos del diagrama que se equilibra —y para el que se asegura resistencia suficiente en todas las secciones— y por lo tanto, en vigas de igual resistencia en positivos y negativos como las realizadas con perfiles laminados de acero, es apropiado establecer la igualdad en los momentos negativos y positivos para los vanos de mayor luz. Sin embargo en vigas diseñadas a medida, como son las de hormigón armado, pueden establecerse otros diagramas arbitrarios, siempre que supongan el equilibrio con las cargas, en la medida en que faciliten reglas de armado más razonables que las generadas mediante los diagramas obtenidos por análisis elástico, máxime si pequeñas irregularidades en la trama resistente conducen, aplicando rigurosamente los métodos elásticos, a irregularidades en la distribución resistente que se revelen innecesarias en base a los criterios que aporta el teorema estático.

[17] Por ejemplo las tensiones residuales de laminación en los perfiles laminados.

Para que lo anterior sea válido en estructuras reales debe asegurarse que no se superen las condiciones de ductilidad que aseguran el estadio plástico antes de la rotura, lo que exige respetar límites en cada tipología estructural definidos en los textos especializados[18].

Podemos establecer las ecuaciones de equilibrio entre cargas y esfuerzos flectores considerando los de extremo de las barras junto con los esfuerzos en algún punto del vano, por ejemplo en el centro, cerca de donde se suponen los máximos valores en momentos positivos, generando de este modo un conjunto de ecuaciones de equilibrio cuyo formalismo es similar al habitual: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}$.

La forma más inmediata de proceder si es posible anticipar de antemano las configuraciones de colapso relevantes consiste en añadir a dichas ecuaciones filas adicionales —ecuaciones— que identifiquen las resistencias con los momentos solicitación en igual número como rótulas sean precisas para obtener un mecanismo, precisamente las correspondientes a dichas rótulas. Dichas ecuaciones o filas no son más que ecuaciones equivalentes a las constitutivas o de admisibilidad material consideradas al estudiar los métodos elásticos de análisis, pues ligan las solicitaciones con las resistencias posibles. Las condiciones de compatibilidad están incluidas implícitamente al establecer el mecanismo que se supone para el colapso, y que hemos supuesto prefigurado, y si todas las elecciones fuesen correctas, el triple grupo de condiciones aportaría la solución única al problema. Puesto que las resistencias buscadas para la piezas son incógnitas, las filas que representan las condiciones de resistencia tendrán ceros para el término independiente de cargas, y valores de más y menos uno en los términos que igualen resistencia con solicitación. Si todas las resistencias buscadas se expresan a partir de una referencia única —todas iguales, o todas en proporción prefijada a la de una sección definida que se usa de base— resultará que el número de rótulas es el que transforma la estructura en un mecanismo, es decir, las que la hacen isostática más una, por lo que el número de ecuaciones resultante es el que elimina las condiciones de hiperestatismo, más una, que añade la condición necesaria para la incógnita de resistencia adicional. El nuevo sistema, representado por $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{H}'\boldsymbol{f}'$ es resoluble[19] —salvo singularidad en la forma, que haría $\boldsymbol{H}'$ singular—

Consideremos el ejemplo del capítulo anterior, para el que supondremos que el tramo central es el primero en romper, en sus secciones extremas y próxima al centro del vano. Formulamos las ecuaciones de equilibrio entre carga y momentos, es decir, las obtenidas a partir de la necesidad de soportar el isostático, que determina el momento del centro del vano a partir de los de extremo:

$$\left[\frac{ql_2^2}{8}\right] = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_{21}\\ m_{22}\\ m_{2v}\end{bmatrix}$$

[18]En acero deben emplearse perfiles realizados con secciones de clase 1 de acuerdo a la clasificación del Eurocódigo 3, y en hormigón las esbelteces de las vigas no deben superar valores convencionales de acuerdo al Eurocódigo 2, que se cumplen usualmente en estructuras de edificación si se cumplen los límites de flecha habituales.

[19]Las filas adicionales en $\boldsymbol{F}'$ son ceros, el término adicional de $\boldsymbol{f}'$ es la incógnita de referencia para las resistencias, las nuevas filas de $\boldsymbol{H}'$ serán las que identifican resistencias con solicitaciones, y su columna final tendrá ceros en las filas correspondientes a las ecuaciones de equilibrio.

Incorporando las condiciones de resistencia las ecuaciones quedan

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{ql_2^2}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{22} \\ m_{2v} \\ M_p \end{bmatrix}$$

de donde se deduce la expresión conocida para piezas con continuidad en ambos extremos $M_p = \frac{ql^2}{16}$ que iguala momentos negativos y positivos si éstas son de igual resistencia ante ambos signos de la solicitación.

A partir de los momentos que se han obtenido para las posiciones predeterminadas elegidas —extremos y centro de vano, que prefiguran las posibles posiciones de las rótulas plásticas— debe trazarse la gráfica completa, y el resultado será válido si las demás regiones de la viga tienen momentos menores a la resistencia obtenida. Si las rótulas que corresponderían al colapso de esa estructura con la carga prevista no están situadas en alguna de las posiciones predeterminadas alguna región tendrá momento mayor al obtenido para dichas posiciones: dicha región sufriría plastificación con anterioridad a alguna de las rótulas supuestas, y de hecho no se estaría cumpliendo en dicha región la admisibilidad material si se dimensionase con los valores determinados para las posiciones atribuídas a las rótulas. Sin embargo, en caso de dimensionar estas regiones con dicha mayor solicitación, se cubrirían las condiciones del teorema estático y el dimensionado pasaría a ser seguro. En caso de querer disminuir el dimensionado, habrá que reestudiar la estructura sustituyendo alguna de las posiciones en las que se han situado las rótulas inicialmente por la obtenida con mayor solicitación, reiterando el proceso hasta lograr coincidencia entre los máximos esfuerzos y las posiciones elegidas para las rótulas.

Si no se hiciese el trazado señalado en el párrafo anterior, la solución quedrá del lado de la inseguridad, puesto que lo que se estará haciendo realmente no corresponde a un análisis basado en el teorema estático, sino que se están empleando las ecuaciones de equilibrio en el marco del enfoque que parte del empleo del teorema cinemático, y por tanto dichas ecuaciones deben interpretarse necesariaamente como de igualdad de disipación de energía entre cargas y rótulas plásticas, para las posiciones prefijadas de dichas rótulas.

Estructura de cables

En este problema la ecuación de equilibrio establecida en el apartado 4.1.2 era

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1x} & \alpha_{2x} & \alpha_{3x} \\ \alpha_{1z} & \alpha_{2z} & \alpha_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

El problema podría estudiarse analizando el proceso de colapso paso a paso, a partir de la plastificación sucesiva de las barras, añadiendo a los parámetros elásticos los plásticos correspondientes a la plastificación sucesiva de cada barra, a saber, la deformación plástica de la barra, y la resistencia límite de ésta, lo que puede hacerse siguiendo el método ejemplificado en [Ortiz and Hernando, 2002]; es fácil ver sin embargo que la plastificación de la primera barra no es suficiente para el colapso: pasa a ser una fuerza fija en el nudo que, junto con la carga, dará una resultante que puede ser equilibrada por las dos barras restantes,

requiriéndose la plastificación de una barra adicional para llegar al colapso por falta de condiciones para el equilibrio. El análisis puede plantearse como la búsqueda de las menores resistencias capaces de asegurar que se soporta la carga, lo que podemos hacer al igual que en el ejemplo anterior en términos de valores relativos a uno prefijado, como por ejemplo, suponiendo todos los cables de igual sección y buscando la menor sección que permite soportar las cargas. Esto hace que se requiera introducir una incógnita adicional, y por lo tanto tantas ecuaciones como las precisas para lograr eliminar el grado de hiperestatismo —uno en este caso— más la necesaria para fijar la nueva incógnita —otra más, lo que suma las dos requeridas en el ejemplo—

Las ecuaciones añadidas son las de resistencia, o de admisibilidad material, estando la compatibilidad implícita en la conectividad atribuída al nudo.

La ecuación final puede ser, por tanto, bien

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_{1x} & \alpha_{2x} & \alpha_{3x} & 0 \\ \alpha_{1z} & \alpha_{2z} & \alpha_{3z} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_p \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \alpha_{1x} & \alpha_{2x} & \alpha_{3x} & 0 \\ \alpha_{1z} & \alpha_{2z} & \alpha_{3z} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_p \end{bmatrix}$$

dependiendo de cual sea la segunda barra en plastificar.

Si la solución fuese la representada por el segundo sistema de ecuaciones, resultará que el empleo del primero derivaría en un valor para f_3 mayor que el de la resistencia obtenida f_p por lo que dicha barra no cumpliría las condiciones prescritas y sería claro que debe aplicarse la ecuación de resistencia a la misma. Esto permite imaginar que el procedimiento a aplicar en una situación de estructura de barras hiperestática en la que quisiésemos contar con la reserva plástica consista en añadir filas correspondientes a ecuaciones de resistencia para eliminar el hipertestatismo junto con la incógnita añadida, filas en las que las barras elegidas para establecer el criterio de resistencia —de plastificación— se eligen arbitrariamente, e ir sustituyendo sucesivamente dichas filas, eligiendo siempre la barra más solicitada de entre las que no cumplen el criterio de resistencia y eliminando de la condición de resistencia alguna de las barras elegidas arbitrariamente, lo que deberá ir haciendo crecer la resistencia requerida[20], hasta que se alcanza la situación de que todas las barras tienen solicitaciones iguales o menores a la resistencia obtenida.

Sin embargo en este tipo de estructuras pasa a ser crítico el problema de asegurar la suficiente ductilidad, de forma que pueda verificarse que no se superan las elongaciones que dan origen a la rotura final: estamos por tanto presentando un procedimiento teórico cuya aplicación a estructuras reales resulta insegura: para poder asegurar el difícil cumplimiento de dicho requisito es preciso un análisis paso a paso, midiendo en cada paso los alargamientos plásticos acumulados necesarios hasta que se alcanza la elongación de rotura. Dado el fenómeno de

[20] En caso de que la resistencia requerida disminuyese, se debería restablecer la ecuación de resistencia para la última barra eliminada y elegir otra.

estricción, por el que la elongación plástica se concentra en una región pequeña, dicho margen es muy pequeño, y no resulta por ello prudente contar con la reserva plástica en este tipo de estructuras.

Pórtico simple

El tercer ejemplo que analizábamos en aplicación de los métodos elásticos corresponde a un pórtico sometido a carga horizontal.

Para este pórtico, las ecuaciones de equilibrio se escribían en 4.1.2 de la forma siguiente, de acuerdo a los criterios de la figura 4.3

$$\begin{bmatrix} F_x \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{31} \\ m_{32} \end{bmatrix}$$

En caso de haber voladizos con carga, las ecuaciones serían las mismas, sin más que establecer M_1 y M_2 con los valores correspondientes a la acción de dichos voladizos.

Como se ve, el grado de hiperestatismo es tres, de modo que para alcanzar el colapso hacen falta cuatro rótulas, o lo que es lo mismo, si buscamos la resistencia mínima requerida para sostener las cargas en el límite antes del colapso tenemos cuatro incógnitas más que ecuaciones, que se completarán por tanto con las cuatro ecuaciones de resistencia correspondientes a las secciones en las que supongamos que se producen las rótulas.

Suponiendo un mecanismo de colapso por desplazamiento del tablero y rótulas en cabeza y base de los pilares, el sistema completo sería, siguiendo el mismo procedimiento que en casos anteriores:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_x \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{31} \\ m_{32} \\ M_p \end{bmatrix}$$

ecuaciones en las que es fácil ver que pueden reducirse por sustitución a $F_x = \frac{4}{h} M_p$, con $M_p = \frac{F_x h}{4}$.

En el caso de que el tablero estuviese sometido a carga vertical, para el análisis del equilibrio habrá que introducir un punto adicional en dicho tablero a fin de expresar el equilibrio que se produce entre cargas y momentos en forma similar a la empleada en el caso de la viga continua. Una alternativa a la forma de rotura considerada en el párrafo anterior sería aquella en la que se forma una rótula a momentos positivos en el tablero en sustitución de la situada en la cabeza del pilar a sotavento. Todas las consideraciones señaladas en el ejemplo de la viga continua sobre las consecuencias del acierto o desacierto al fijar la posición de la rótula del vano serían igualmente válidas en este caso. Cabe añadir a este problema una consideración adicional: dado que en piezas en que

interaccionan esfuerzos N y M el momento último depende del esfuerzo axial, el sencillo estado de colapso obtenido sin consideración de dicha interacción aportará valores de momento tal vez inalcanzables en las rótulas comprimidas, e incluso el estado obtenido puede no corresponder al estado de colapso real. Vamos a estudiar por ello ese problema con los recursos del apartado 5.2.2.

Pórtico simple con dos cargas independientes

Como ejemplo final, y al objeto de revisar el procedimiento completo propuesto en el apartado 5.2.2, analizaremos el caso de un pórtico simple sometido a dos cargas, horizontal F_1 y vertical F_2. La forma más sencilla del problema es considerar fijas ambas cargas, y en ese caso buscar el factor de carga γ que caracteriza a la resistencia del pórtico frente a ambas cargas amplificadas por el mismo factor.

Establecemos por tanto, de acuerdo a la sección 5.2.2,

$$\boldsymbol{F} = \gamma \boldsymbol{F}_I = \gamma \begin{bmatrix} F_I \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

siendo las configuraciones U_1 y U_2 las que se derivan de la rotura independiente y asociada a la dirección de acción de cada una de las cargas, tal como se representa en la figura 5.10.

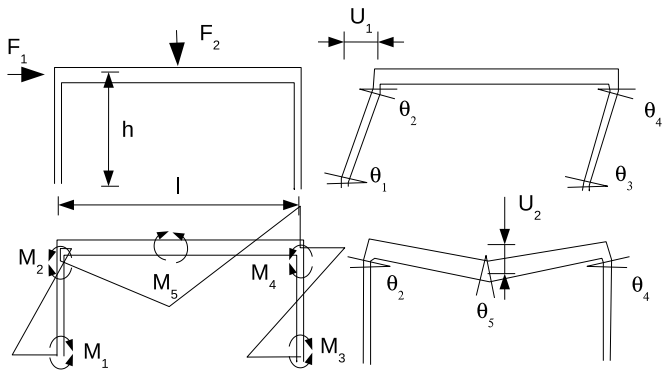


Figura 5.10: Componentes de la estática y la cinemática de rotura en pórtico simple

En dicha figura se identifican los puntos de máximos momentos, que por tanto describen las posiciones requeridas para determinar los esfuerzos relevantes —y las posibles posiciones de las rótulas plásticas— y, dadas las posibles configuraciones para las combinaciones de cargas previstas, sólo en el caso de la sección 2 —identificada en la figura por el momento o la rotación plástica— es posible concebir valores de momento con signos diferentes según que la carga dominante sea la horizontal, o la vertical. En casos más generales, en que no sea factible tal determinación a priori, el tratamiento que apliquemos a esta sección sería común a todas, como podría serlo en este ejemplo si considerásemos posibles valores negativos para las cargas.

Tendremos, por lo tanto, como valores relevantes para esfuerzos $\boldsymbol{f}$ y deformaciones $\boldsymbol{u}$ los siguientes:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} M_{1p} \\ M_{2p} \\ M_{3p} \\ M_{4p} \\ M_{5v} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \theta_{1p} \\ \theta_{2p} \\ \theta_{3p} \\ \theta_{4p} \\ \theta_{5v} \end{bmatrix}$$

y podremos establecer como ecuaciones de equilibrio $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}$ y compatibilidad $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$ las siguientes:

$$\begin{aligned} \gamma \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{l} & 0 & \frac{2}{l} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1p} \\ M_{2p} \\ M_{3p} \\ M_{4p} \\ M_{5v} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \theta_{1p} \\ \theta_{2p} \\ \theta_{3p} \\ \theta_{4p} \\ \theta_{5v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & -\frac{2}{l} \\ \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{2}{l} \\ 0 & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.29}$$

Las condiciones de resistencia se establecen suponiendo la rotura de cada una de las secciones consideradas, para cada caso de rotura posible: establecemos como lista de resistencias la siguiente, considerando resistencias plásticas definidas por los valores de los momentos de rotura y, sólo para la sección 2, la posibilidad de romper con momentos de signo diferente según predominen las cargas horizontales o las verticales.

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} M_{pp1} \\ M_{pp2a} \\ M_{pp2b} \\ M_{pp3} \\ M_{pp4} \\ M_{pv5} \end{bmatrix}$$

siendo entonces las condiciones de resistencia posibles $\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{f} - \boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{0}$ las seis siguientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1p} \\ M_{2p} \\ M_{3p} \\ M_{4p} \\ M_{5v} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{pp1} \\ M_{pp2a} \\ M_{pp2b} \\ M_{pp3} \\ M_{pp4} \\ M_{pv5} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

La solución del problema, de acuerdo a 5.9 exige obtener los valores de $\boldsymbol{\lambda}_p \geq \boldsymbol{0}$ que minimizan el factor $\gamma = \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{\lambda}_p$ para las condiciones $\boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\lambda}_p$ y $\boldsymbol{F}_I^T\boldsymbol{U} = 1$ que, sin más que operar las expresiones anteriores, definen las

restricciones siguientes:

$$\begin{bmatrix} \frac{U_1}{h} \\ \frac{U_1}{h} - \frac{2U_2}{l} \\ \frac{U_1}{h} \\ \frac{U_1}{h} + \frac{2U_2}{l} \\ \frac{4U_2}{l} \\ U_2F_2 + U_1F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

siendo

$$\gamma = \lambda_1 M_{pp1} + \lambda_2 M_{pp2a} + \lambda_3 M_{pp2b} + \lambda_4 M_{pp3} + \lambda_5 M_{pp4} + \lambda_6 M_{pv5}$$

Puede verse en las ecuaciones anteriores cómo las expresiones de compatibilidad fuerzan la unificación de los multiplicadores λ_i en torno a la combinación de dos que podríamos considerar independientes: λ_1 que responde a la rotura de la sección inferior del pilar por la rotura de pórtico descrita por el movimiento U_1, y λ_6 que responde a la rotura del vano de la viga por la rotura de tablero descrita por el movimiento U_2, resultando λ_4 idéntico a λ_1, y λ_2 y λ_5 combinaciones de los dos independientes.

Las soluciones, que pueden obtenerse numéricamente para los casos en los que los valores de cargas y resistencias estén definidos, pueden también explorarse algebraicamente para caracterizar las distintas posibilidades. Contando con que γ es una suma de valores que deben ser positivos o nulos, su minimización, asegurando que se cumple la última ecuación que asegura algún movimiento de colapso, nos deja tres casos posibles, a saber

- Rotura de pórtico: cuando $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_6 = 0$. En este caso en el colapso sólo se da el movimiento U_1, pues λ_3 puede anularse para minorar la suma del conjunto, de modo que los multiplicadores activos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5$ tienen todos el mismo valor, que es el desplome del pórtico, igual a la rotación en las cuatro rótulas en pie y cabeza de pilares, y las ecuaciones describen el equilibrio de la carga horizontal a través de las diferencias de momentos entre cabeza y pie de ambos pilares, con las cuatro rótulas que requiere el mecanismo de colapso.

- Rotura de tablero: cuando $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_6 > 0$. En este caso el movimiento de colapso es el U_2, y los multiplicadores no nulos $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$ son precisamente los que definen las rótulas de la rotura de tablero. Las ecuaciones describen la resistencia máxima posible frente a la carga vertical, contando con los momentos en cabeza de pilares y en vano de viga.

- Rotura combinada: cuando ambos λ_1 y λ_6 son no nulos. En este caso lograr el menor valor en γ exige minorar $\lambda_2 M_{pp2a} + \lambda_3 M_{pp2b}$ manteniendo constante, como dice la segunda ecuación, la diferencia $\lambda_2 - \lambda_3$, lo que puede lograrse si se anulan ambos multiplicadores λ_2 y λ_3 y se asegura que se cumple $\frac{U_1}{h} - \frac{2U_2}{l} = 0$ o lo que es lo mismo cuando $U_2 = U_1 \frac{l}{2h}$. Esto configura el mecanismo combinado en el que la cabeza del primer pilar no alcanza la plastificación[21], dado que la ecuación describe precisamente la

[21] pues es precisamente eso lo que indica el que los correspondientes multiplicadores sean nulos: dichas condiciones de rotura no están activas

condición requerida para mantener el ángulo inicial entre pilar y viga, y las cuatro rótulas del mecanismo combinado estarán por lo tanto en pie del primer pilar, vano de viga, y cabeza y pie del segundo pilar.

Se ve por tanto con mucha claridad cómo expresan los multiplicadores las condiciones activas —las rótulas del mecanismo de colapso—: sus valores corresponden precisamente con la rotación que en la cinemática de colapso se produce asociada al momento resistente —o capacidad— de la correspondiente sección y, como se ve en el caso de la sección 2, seleccionando el valor que aporta trabajo positivo dado el signo del momento existente en el correspondiente mecanismo de colapso.

Podemos finalmente dibujar la capacidad resistente del pórtico en un gráfico en el que los ejes coordenados sean las cargas $\boldsymbol{F}$, tal como se hace en la figura[22] 5.11.

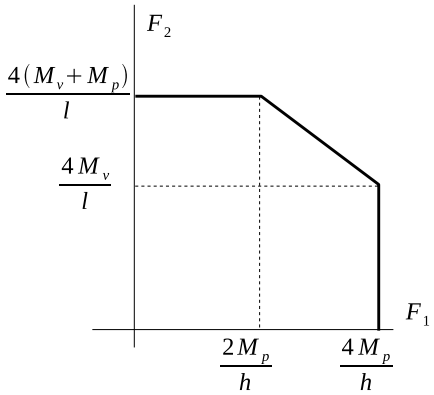


Figura 5.11: Carga límite en pórtico simple

Hasta aquí el abordaje al problema se ha hecho desde la formulación cinemática, ecuación 5.11. El modo alternativo sería formular las condiciones del teorema estático de acuerdo a la 5.12 es decir, asegurando el cumplimiento simultáneo de las condiciones de resistencia y de equilibrio para la mayor carga posible.

Las condiciones de resistencia son las 5.30, y las de equilibrio las indicadas en 5.29, aunque sustituiremos en ellas γ por Γ, tratando ahora de magnificar Γ.

Si consideramos la primera de las dos ecuaciones de equilibrio, mayorar Γ implicará maximizar la suma $\frac{1}{h}(M_{1p}+M_{2p}+M_{3p}+M_{4p})$ sin superar la resistencia, de modo que si igualamos todas las de los pilares, el límite estará cuando la suma $\frac{4M_p}{h}$ iguale a la carga expresada en esa ecuación, lo que representa la rama vertical de la figura límite 5.11. La rama corresponde al mecanismo de pórtico identificado más arriba, y no puede ir más allá de la horizontal que supone el cumplimiento de la segunda ecuación y por tanto con $\Gamma F_2 \leq \frac{4Mv}{l}$.

Si consideramos en cambio la segunda ecuación de equilibrio, se puede mayorar Γ llevando al máximo la suma $\frac{2}{l}(-M_{2p} + M_{4p})$ maximizando simultáneamente el valor de M_{5v} sin superar en pilares la resistencia M_p —en valor

[22]dicha gráfica no es más que la proyección en el espacio de las cargas de la figura que representa la superficie límite en el espacio de los esfuerzos, siendo la expresión de proyección la establecida por las ecuaciones de equilibrio.

absoluto— y en vano la M_v lo que lleva a usar momentos de signo negativo en 2. Ésto nos lleva por lo tanto al límite de $\frac{4}{l}(M_p + M_v)$ para la carga ΓF_2 —la rama horizontal de la misma figura, que corresponde al mecanismo de tablero— aunque la condición obtenida no podrá superar el límite marcado por la primera ecuación con $\frac{2Mp}{h} \leq \Gamma F_1$.

Para las situaciones en que simultáneamente ΓF_1 supera $\frac{2Mp}{h}$ y ΓF_2 supera $\frac{4Mv}{l}$, deberemos maximizar Γ cumpliendo simultáneamente ambas ecuaciones y, por tanto, maximizando $\Gamma = (M_{1p} + M_{2p} + M_{3p} + M_{4p})/(hF_1) = (-2M_{2p} + 2M_{4p} + 4M_{5v})/(lF_2)$. Esto liga linealmente F_1 con F_2 en un límite que como puede verificarse incluye los descritos para los dos mecanismos precedentes, y que corresponde al mecanismo combinado definido por la oblicua de la misma figura que corta al eje horizontal en $\frac{1}{h}(4M_p+2M_v)$ y al vertical en $\frac{1}{l}(8M_p+4M_v)$ por lo que queda representada por la ecuación

$$F_1 h(8M_p + 4M_v) + F_2 l(4M_p + 2M_v) = (8M_p + 4M_v)(4M_p + 2M_v)$$

$$2F_1 h + F_2 l = 8M_p + 4M_v \tag{5.31}$$

El versor de dicha recta límite tiene la misma orientación que el vector de componentes $[1, \frac{l}{2h}]$

Es interesante representar las condiciones límite expresadas por la figura en la forma de la ecuación 5.4 pero referidas al espacio de las cargas, en vez del al de las solicitaciones[23], $\boldsymbol{\Psi F} \leq \boldsymbol{R}$, ecuación 5.19:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{l}{2h} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \frac{4M_p}{h} \\ \frac{4M_p+2M_v}{h} \\ \frac{4(M_p+M_v)}{l} \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

En esta representación, la ortogonalidad a la superficie límite se expresaría haciendo $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Lambda}$ de acuerdo a la forma que adopta la ecuación 5.5 en el espacio global de las cargas, de modo que los movimientos de colapso podrían expresarse en la forma

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2h} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

lo que expresa que el desplazamiento lateral será la suma del derivado del mecanismo de pórtico (Λ_1) más el del mecanismo combinado (Λ_2), mientras que el descenso de vano depende de una expresión del movimiento combinado más el derivado del desplazamiento del mecanismo de tablero (Λ_3), para la combinación que resulte activa en el colapso, que sólo puede ser, o uno de los tres, o dos en los puntos en que ambos mecanismos coinciden, para los vértices de la superficie de colapso.

Puede verificarse cuál es el mecanismo activo trasladando la ecuación 5.6 al espacio de las cargas, en la forma $(\boldsymbol{\Psi F} - \boldsymbol{R})^T \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{0}$, ecuación 5.20, que expresa que o bien se cumple estrictamente la condición de resistencia y el

[23] En rigor, el vector representado por la segunda fila de $\boldsymbol{\Psi}$ debería ser un versor de módulo unidad, reduciendo en idéntica escala el módulo de R_2, aunque esto dificultará *percibir* el sentido de la ecuación.

correspondiente multiplicador es no nulo —y está activo— o el multiplicador debe ser nulo y estará inactivo si existe exceso de resistencia.

Podemos comprobar finalmente las afirmaciones contenidas en el apartado 5.2.3. Para ello postulamos la existencia de la relación $\boldsymbol{L\Lambda} = \boldsymbol{\lambda}$, ecuación 5.22, que podemos construir con cierta facilidad explorando los multiplicadores activos λ_i para cada uno de los mecanismos de rotura Λ_j, considerando los Λ_j descritos por el desplazamiento unidad en el correspondiente mecanismo de colapso (pórtico, combinado y de tablero), y para los λ_i las correspondientes rotaciones en las rótulas, considerando en el caso de la sección 2 la que corresponda al signo positivo en la disipación, es decir, λ_2 para el caso de la rotura de pórtico, y λ_3 para la rotura de tablero, de acuerdo a la figura 5.12.

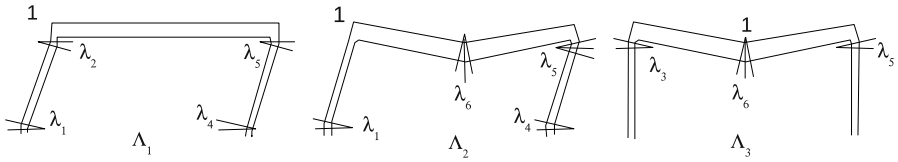


Figura 5.12: Mecanismos de colapso de pórtico

Tenemos entonces que la relación postulada es

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0\\ \frac{1}{h} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{l}\\ \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0\\ \frac{1}{h} & \frac{2}{h} & \frac{2}{l}\\ 0 & \frac{2}{h} & \frac{4}{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\end{bmatrix}$$

Para dicho valor de la matriz $\boldsymbol{L}$ podemos verificar inmediatamente la afirmación de dicho apartado contenida en la ecuación 5.23 de que $\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\Psi B}^T$ sin más que comprobar los productos correspondientes:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0\\ \frac{1}{h} & 0 & 0 & \frac{1}{h} & \frac{2}{h} & \frac{2}{h}\\ 0 & 0 & \frac{2}{l} & 0 & \frac{2}{l} & \frac{4}{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \equiv$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{l}{2h}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0\\ 0 & -\frac{2}{l} & 0 & \frac{2}{l} & \frac{4}{l}\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0\\ \frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} & \frac{2}{h} & \frac{2}{h}\\ 0 & -\frac{2}{l} & 0 & \frac{2}{l} & \frac{4}{l}\end{bmatrix}$$

Es muy interesante observar la correspondencia entre las superficies límite, la definida en el espacio de los esfuerzos $\boldsymbol{f}$, frente a la definida en el espacio de las cargas $\boldsymbol{F}$, dado que éste puede expresarse como una proyección del anterior, definida mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio. En la figura 5.13 se representan las del caso analizado, reduciendo el espacio de los esfuerzos, de

cinco dimensiones, a las tres más representativas, suponiendo iguales los valores de f_1, f_3 (y f_4 en la primera parte de la figura), y donde los subíndices indican la posición de esfuerzos, cargas y capacidades límite en las ecuaciones definidas anteriormente.

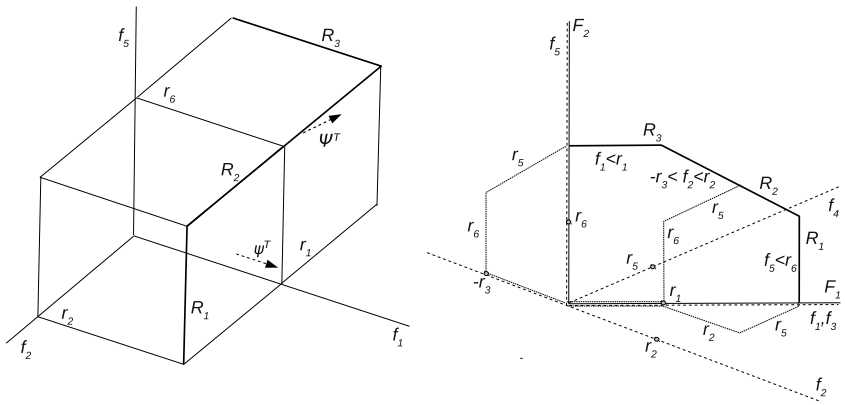


Figura 5.13: Poliedros límite en pórtico

Finalmente, si en este ejemplo queremos considerar la posibilidad de rotura en los pilares por el efecto combinado de los momentos y los esfuerzos normales, tendremos que añadir parámetros de esfuerzo adicional en el vector $\boldsymbol{f}$ para representar dichos esfuerzos normales y, por ende, parámetros de deformación $\boldsymbol{u}$ asociados a éstos. Es razonable considerar el acortamiento del pilar por flujo plástico localizado, pero como esa deformación no puede describirse con los movimientos indicados en el ejemplo, se necesitará añadir movimientos independientes adicionales $U_3, U_4, \ldots$, tal como en la figura 5.14, movimientos para los que aparecerán nuevas ecuaciones de equilibrio y compatibilidad[24]. Puede verse en la figura que bastarían dos movimientos globales adicionales para dar cuenta de los acortamientos separados de cada soporte. Las ecuaciones de compatibilidad implícitas en la figura se han elegido para que los nuevos movimientos globales involucren deformaciones en las piezas, pero no involucren a ninguno de los movimientos —o grados de libertad global— considerados previamente. El añadido de esos dos movimientos globales exige el correspondiente añadido de dos cargas asociadas a éstos F_3, F_4 —tal vez nulas, como en el ejemplo propuesto— para mantener la congruencia del modelo.

Necesitaremos finalmente condiciones de resistencia adicionales: si obviamos las situaciones que no se van a dar —aplastamiento por normal centrado, puesto que siempre habrá momentos— quedan aún sin embargo las condiciones de rotura de cabeza o de pie de cada pilar por momento y normal combinados, con ecuaciones, tal vez no lineales, que una vez linealizadas mediante su des-

[24]Puede hacerse notar que el movimiento parece indistinguible a efectos macroscópicos independientemente de que la deformación se localice en el pie o en la cabeza del correspondiente pilar, como corresponde al hecho de que los normales son idénticos en cabeza y pie. Aunque la combinación con el estado de momentos flectores depende en cada sección de la pareja normal–momento, como el normal es idéntico en cabeza y pie, podemos usar un sólo parámetro de *deformación con aplastamiento* que estará en la sección para la que la combinación con el momento corresponda a una configuración de rotura, aun cuando en la figura está representado como un aplastamiento localizado en cabeza

composición en segmentos suponen para cada segmento expresiones del tipo $\alpha N_i + \beta M_i \leq 1$ fáciles de incorporar a la expresión de resistencia 5.4, tareas todas ellas que puede desarrollar el propio lector como ejercicio.

La figura 5.14 puede servir de referencia para dicho ejercicio.

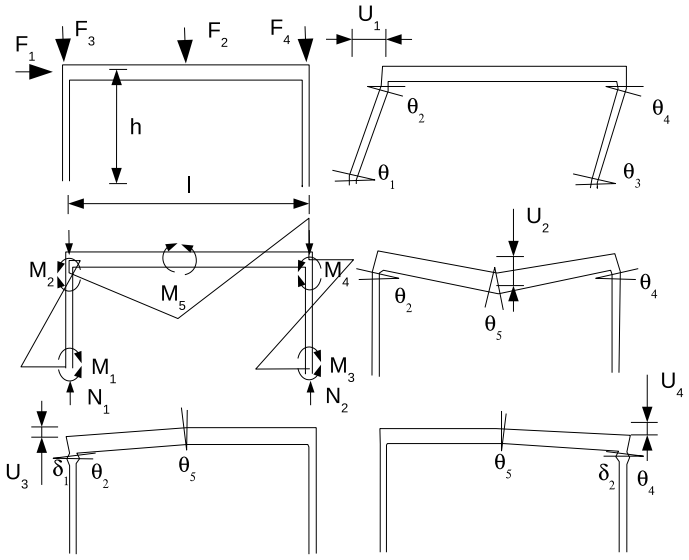


Figura 5.14: Componentes de la cinemática de rotura, con acortamientos en pilares

Parte III

Proyecto

Capítulo 6

Teoría de proyecto

6.1. Introducción

En el capítulo de introducción de este texto se establecían los objetivos de una teoría del proyecto de estructuras. Se decía allí que se trata de clasificar y cualificar el comportamiento de dichas clases de estructuras a partir del menor y más potente número de parámetros posibles, de modo que la predicción de su forma de trabajo, de su idoneidad y eficacia pueda realizarse desde pronto, a partir de los parámetros en juego en las fases iniciales del diseño, y sin necesidad de llegar a la definición detallada ni al análisis de la estructura final.

En la medida en que en dichas fases iniciales los parámetros empleados para validar los esquemas que se proyectan desde perspectivas variadas —uso, compatibilidad y entronque con el entorno, ...— son básicamente geométricos, de forma, se trata de poder validar la idoneidad de la estructura y sus requisitos básicos para resolver eficazmente el problema planteado desde la forma misma. Se tratará de establecer conclusiones a partir de las cualidades más generales de la forma adoptada para la estructura.

En dicha introducción se avanzaba la necesidad de contar en la evaluación de formas alternativas no sólo con el cumplimiento de los requisitos estructurales, sino además con algún tipo de medida sobre la eficiencia con que se alcanzan dichos requisitos. Toda estructura que resuelve un mismo problema deberá satisfacer idénticamente los niveles de seguridad y de rigidez establecidos frente a las cargas a que estará sometida, y por ello la medida de comparación no pueden ser dicha seguridad o rigidez. El término de comparación adecuado será el inverso del esfuerzo humano, en uso de recursos, en huella ambiental, que suponga el empleo de una u otra alternativa. Serán preferibles, en igualdad de cualesquiera otras condiciones, las estructuras que menor esfuerzo o coste requieran. Esto exige por un lado establecer la forma de estimación de dicho esfuerzo, a través de alguna magnitud precisa que permita medirlo de forma inequívoca, y que pueda determinarse a partir de las cualidades de la propia solución estructural. Y esto exige igualmente considerar las formas mediante las que pueda recorrerse la evolución de dicha magnitud a partir de variaciones en los parámetros de forma considerados, lo que remite a los problemas de optimización.

En este capítulo, tras analizar alternativas a dichos problemas, se opta por el empleo de una magnitud precisa para la medida del esfuerzo necesario para

la materialización de la estructura, denominada *cantidad de estructura*, cuya determinación y cualidades se exploran, estableciendo varios importantes teoremas generales de aplicación a dicha magnitud en amplias clases de soluciones estructurales.

6.2. El proyecto de estructuras

Todo objeto real, a lo largo de su existencia se ve sometido a agresiones físicas, de entre las que un cierto grupo son identificables como acciones mecánicas: fuerzas externas, de masa o de inercia. Otras provocan cambios dimensionales en aquél: temperatura, tiempo, asientos. Las propiedades que le permiten sobrevivir con éxito frente a las mismas durante un cierto tiempo se denominan **cualidades estructurales**, y el conjunto de especificaciones de tales cualidades que permite definir objetos con dicha capacidad de supervivencia se denomina conjunto de **requisitos estructurales**.

El objeto del diseño estructural consiste, según los casos, ya sea en definir las propiedades geométricas y materiales generales del objeto o de partes precisas de éste, ya sea en comprobarlas y modificarlas, en ocasiones mediante el diseño de componentes específicos del propio objeto, con el fin de que se cumplan los requisitos estructurales. Para un edificio tales requisitos pueden resumirse en lograr un objeto que, con **fiabilidad** suficiente

- Sea estable en conjunto y en cada una de sus partes.(**Estabilidad**).
- Disponga de seguridad suficiente frente a rotura. (**Resistencia**).
- Presente deformaciones compatibles con el uso. (**Rigidez**).
- No presente alteraciones locales que puedan variar la seguridad en el trancurso de la vida útil prevista (**Durabilidad**), y
- logre todo ello a un coste, o de forma más general, con un impacto ambiental[1] razonablemente bajo, con un buen aprovechamiento de los recursos requeridos (**economía**, y **sostenibilidad**).

De entre todos los requisitos, son los de estabilidad, resistencia y rigidez los más fáciles de establecer de acuerdo a las razones de la mecánica.

Hemos hablado de las agresiones de tipo físico ligadas a fuerzas o a cambios dimensionales al establecer las cualidades estructurales. Estas agresiones se denominan **acciones** y tienen naturaleza y origen variados.

Existen acciones asociadas a sistemas de fuerzas vivas, o de inercia —gravitatorias, eólicas, sísmicas, impactos, vibraciones,...—, acciones ligadas a cambios dimensionales —térmicas, reológicas—, acciones que, además, modifican las cualidades estructurales de los materiales, —fuego, alteraciones químicas,...—

[1] Como muestra la *regla del notario* de Antonio Valero y José Manuel Naredo (ver [Naredo, 1994, Valero, 1994]), no podemos confiar sólo en las expresiones del coste, dado que no existe una relación lineal entre el coste y el contenido físico de materia o energía agregado a productos o servicios: más bien la relación supone mayores incrementos de precio en las fases finales y de menor contenido físico de la generación de valor. Pero no es sólo esto: en tanto no se contabilicen también en los costes reales el equivalente a la reposición a su estado primitivo de las fuentes naturales de materiales o energía, la contabilidad sobre el impacto ambiental y físico de nuestras actividades no podrá estar asociada al mero coste monetario de éstas.

Esta variedad de acciones, que para el análisis significa sólo incrementar el tiempo o el coste del mismo, amén, tal vez de su complejidad, requiere cara al diseño discernir cuáles van a ser en cada caso las dominantes en el proceso de dar la forma definitiva al objeto.

6.2.1. Normalización

El uso implica generalmente que una parte de las acciones reales van a ser imprevisibles, por lo que se sustituyen de algún modo por acciones normalizadas convencionalmente, y ello obliga a su vez a considerar en el diseño las posibles diferencias que pueden producirse en el comportamiento de la estructura respecto del previsto mediante dichas acciones convencionales, y ello puede ser o no importante según la decisión de que se trate[2].

Las acciones normativas no son en general más que valores convencionales que tienden a producir **en determinados tipos de estructuras** efectos iguales o superiores que los derivados de las acciones reales, casi siempre de muy compleja definición. Hay, por ello que tener siempre muy presente las diferencias descritas en la figura 6.1 entre

- esfuerzos derivados de las acciones, que son los que determina un análisis concreto,
- envolventes para dichos esfuerzos. Se trata ahora de los extremos en los valores que pueden ser alcanzados en cada punto en cualesquiera de las hipótesis de carga analizadas —sea por obligación normativa, sea por decisión del proyectista— y que pretenden acotar los rangos de resistencia requeridos para dichos esfuerzos. En la forma más sencilla, es decir, en situaciones en las que la resistencia se determina por un sólo parámetro, como podría ser el caso de la ley de momentos en vigas, tendremos para cada punto los valores máximo y mínimo obtenidos[3], y a lo largo de la directriz a las dos leyes correspondientes que podrían interpretarse como las leyes extremo que delimitan las regiones que definen los valores de esfuerzo a soportar. En situaciones complejas, sin embargo, las regiones de esfuerzo delimitadas deben atribuyen valores de esfuerzos asociados o que actúan conjuntamente —*concomitantes*— como es el caso de los estados de momento–normal en soportes. En este caso una delimitación precisa de la región límite envolvente consistiría en una superficie definida en una gráfica de tres dimensiones que representen la directriz del pilar, y la pareja

[2]Por ejemplo, en la normativa se miden los efectos del uso en una planta mediante una intensidad de carga que se describe con una sobrecarga uniforme, lo que es perfectamente adecuado cuando se resuelve el problema estructural mediante una losa plana sometida a flexión. Si prescindimos de la realidad de la forma de las acciones y consideramos sólo la carga uniforme convencional, podríamos vernos tentados a dar como solución estructural una bóveda de directriz parabólica, buena estructura para una carga realmente uniforme, pero escasamente adecuada para una sobrecarga real de uso. Para evitar este tipo de problemas, la normativa, mediante el uso de hipótesis alternativas, implica el uso extenso de envolventes de esfuerzos

[3]con precisión habría que decir el máximo absoluto para cada signo posible del esfuerzo sea éste positivo o negativo, con su signo propio. Es decir el mayor valor positivo y el menor valor negativo, y por ende el máximo y mínimo, con la salvedad de que si ambos valores son de igual signo, el mínimo sería el cero si tal caso de esfuerzo es posible en alguna de las situaciones de carga posibles para la estructura.

momento–normal a que las secciones de éste están sometidos en las hipótesis consideradas y sus posibles combinaciones, resultando una superficie tubular que envuelve los esfuerzos posibles

- capacidad resistente de la pieza considerada, que consiste nuevamente en una superficie envolvente determinada por las características propias de resistencia de la pieza, y que lógicamente deberá contener íntegramente a las envolventes de esfuerzos determinadas mediante las hipótesis de carga convencionales analizadas, pero que deberá ser confrontada frente a alternativas reales posibles a dichas hipótesis.

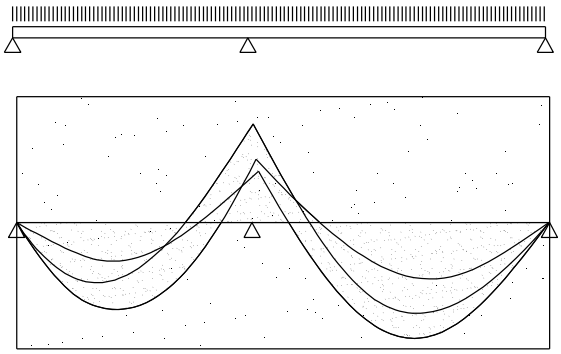


Figura 6.1: Esfuerzo, envolvente, capacidad

6.2.2. Las buenas soluciones

Si consideramos no sólo la influencia de la estructura en la existencia y forma de las acciones, sino la propia indeterminación inherente a buena parte de éstas y la infinita variabilidad de combinaciones en que pueden presentarse, parece imposible el planteamiento directo de la búsqueda de soluciones estructurales. No obtante existe una herramienta teórica —que parte de los Teorema de Maxwell y Michell, de 1890, 1904, ...— que permite clarificar la obtención de estructuras mínimas para sistemas de fuerzas conocidos *a priori*, y ello sirve al menos para fijar ideas fundamentales que deben estar presentes en el proceso de diseño, aun cuando sólo puedan aplicarse directamente en raras ocasiones.

Finalmente, no debe olvidarse que, en general, las condiciones de uso son absolutamente prioritarias, y que en ocasiones determinan la forma hasta tal punto que no es posible establecer un proceso de optimización propio o aislado de los elementos estructurales. O visto de otro modo, las restricciones impuestas por el uso pueden acotar ampliamente el campo de exploración de soluciones, a veces incluso simplificando de forma muy importante la obtención de un óptimo que respete tales restricciones, que no será en puridad óptimo estructural. Pese a ello, y pese a que la calidad de un diseño estructural no puede calibrarse mediante un único criterio de medida, puede afirmarse sin duda que la consideración del coste comparado de soluciones alternativas a un mismo problema va a proporcionar

en general un importante apoyo a la exploración teórica sobre el propio diseño, al permitir unificar gran número de aspectos del problema.

6.2.3. Comprobación o proyecto

Hemos hablado más arriba del cumplimiento de los requisitos estructurales y de los modos convencionales de establecerlos vía normativa. Ahora bien, para satisfacer dichos requisitos no es precisa la existencia de una estructura diferenciada: sin salirnos del campo de la edificación, muchos de los elementos constructivos utilizados en la definición espacial de recintos tienen cualidades de resistencia y rigidez suficientes como para asegurar que se cumplen adecuadamente tales requisitos estructurales. Por el contrario, y en el extremo opuesto desde la perspectiva de la especialización de los componentes constructivos, puede convenir organizar un conjunto de elementos diferenciados cuya función sea sólo la estructural.

Cabe pues una gradación en el nivel de intervención en el diseño estructural preciso para la definición última del objeto, gradación asociada a la eficacia que cabe alcanzar en el problema considerado con un grado de especialización creciente para los elementos que componen el objeto:

- La sola comprobación de que los elementos de definición espacial permiten que se cumplan los requisitos estructurales.
- La determinación de dimensiones, propiedades o peculiaridades de los elementos de definición espacial, de forma que se cumplan dichos requisitos.
- El diseño de elementos específicos que puedan dar lugar a una parte diferenciada, incluso en el proceso de definición y construcción: la estructura.

En el primer caso no nos encontramos ante un problema de diseño estructural o de proyecto de estructura, sino de simple análisis. En los otros dos casos, aparte del análisis, y anterior a él será preciso manejar conocimientos suficientes de diseño o proyecto, bien para proponer las modificaciones, bien para adoptar las decisiones que lleven a una propuesta correcta de estructura resistente.

Para acotar el problema de obtener conocimientos aplicables en fase de proyecto pese a la extremada variabilidad implícita aprovecharemos como herramientas básicas la normalización y el análisis. Pues aun cuando la validación final de toda estructura se realiza por vía experimental una vez construida, hemos visto por una parte que el interés público en evitar dentro de lo posible los daños a personas u objetos, y en lograrlo de una forma relativamente uniforme, hace que los requisitos estructurales estén normalizados en bastante medida, y por otra que el análisis estructural, desarrollado y facilitado en importante medida con la ayuda de los ordenadores, permite verificar y justificar *a priori* el cumplimiento de éstos con un grado de fiabilidad razonable, anticipando por tanto los resultados de dicha experimentación inevitable.

Análisis y Cálculo

Conviene recordar aquí la naturaleza real del proceso de análisis, que a menudo queda enmascarada por la palabra *cálculo*: una parte central de los datos del problema es la propia realidad física del objeto del análisis. Salvo contadas

excepciones no cabe concebir un proceso que tenga como resultado la definición de una estructura sin que previamente haya sido tomado un número considerable de decisiones sobre la misma, por lo que no se trata prácticamente nunca de un problema de cálculo, sino del análisis de un objeto que debe ser definido plenamente con anterioridad. En este sentido puede decirse que el análisis no es más que una herramienta para la crítica de un objeto estructural previamente definido, aunque verdaderamente se trata de una muy poderosa herramienta, sobre la que existe un amplio consenso avalado por sus posibilidades de predicción. Solamente en algunos casos se acomete realmente un proceso de cálculo de parte de los componentes de la estructura, como es el caso del cálculo de las armaduras en las estructuras de hormigón armado, que es posible en tanto se atribuyan las características de comportamiento de una pieza a la geometría de la envolvente de hormigón. Sin embargo en este mismo caso hay una toma previa de decisión sobre esta envolvente, en la que la simplificación de suponer que el armado no influye sustancialmente en la rigidez hace cometer importantes errores en la estimación de la situación tensional de la estructura, aunque, com ya hemos visto, sin consecuencias importantes sobre el grado de seguridad a rotura de la misma.

Podríamos decir, pues, que pueden concebirse dos vías diferentes para producir soluciones estructurales:

- Definir un objeto en detalle y comprobar —mediante experimentación o análisis— que cumple los requisitos especificados, o
- Determinar el objeto mediante algún tipo de algoritmo que permita su definición mediante operaciones que empleen como base de partida los requisitos mismos.

En el primer caso estamos en un proceso de análisis y comprobación, y sólo en el segundo en un verdadero proceso de cálculo —se *calcula* la forma, la solución al problema, mediante operaciones de las que se deriva tal forma como resultado—. Ahora bien, como ya se ha dicho, sólo algunas fases locales del proceso de diseño completo pueden ser formalizadas a tal punto, e incluso para ello han de definirse con precisión diversos criterios aparte de los referidos a asegurar el estricto cumplimiento de los requisitos estructurales. Entre éstos, y tal como se ha visto en las primeras incursiones a los problemas de dimensionado desde la perspectiva del análisis plástico consideradas en el apartado 5.2.2, la minimización del coste o esfuerzo necesario para la implantación de la estructura aporta una vía de unificar aspectos muy diversos de cada problema y, en casos limitados, de aportar la solución. En la mayor parte de los problemas no es posible un proceso tan directo, y es preciso producir propuestas de objetos más o menos completas, para proceder a su evaluación, mediante el análisis de su comportamiento futuro, y la comprobación de que cumplirá los requisitos prescritos.

Con herramientas de análisis adecuadas y mediante un sistema de prueba y error puede llegar a encontrarse una estructura suficientemente estable, segura, rígida, y compatible con otros requisitos de uso, e incluso que se sitúe en un coste razonable, siempre que se destinen a ello los medios y el tiempo necesarios. Los cuatro primeros requisitos son obviamente ineludibles, pero para evaluar el último debe considerarse también el propio coste del proceso de diseño. En función de los medios a emplear puede llegarse a un punto en que el ahorro de

materiales sea menor que el aumento de coste del proceso de diseño, punto que depende del número de objetos iguales que hayan de producirse. En todo caso el método empleado no ha de ser ciego si ha de asegurarse una cierta eficacia en la convergencia hacia una solución. Las modificaciones pueden orientarse a menudo por los resultados de la evaluación, si bien no siempre es correcta la dirección que señala la lectura simple de tales resultados: un ejemplo puede ser el caso de pórticos con vigas de relativamente baja rigidez, en los que fallan los soportes por flexocompresión bajo la concurrencia de carga vertical y horizontal: en este caso la dirección adecuada para corregir la forma es muy a menudo aumentar las dimensiones de las vigas, no las de los soportes.

La experiencia del proyectista puede acortar el camino de prueba y error permitiéndole producir rápidamente diseños válidos y razonables en cuanto a coste, pero por el contrario limita la búsqueda de soluciones alternativas.

La teoría del proyecto estructural trata de racionalizar el proceso de diseño estableciendo, mediante el análisis de soluciones genéricas, reglas que permitan llegar en el menor tiempo y al menor coste posibles a soluciones razonables, sin perjuicio de las necesarias etapas de comprobación final que no hayan sido cubiertas por reglas generales. Para ello trata de determinar las variables de mayor potencia y menor precisión posible, y referir a éstas las propiedades de la estructura. Cuando hablamos de teoría del proyecto estructural nos referimos al proyecto general de la estructura; al final del proceso será precisa una etapa de proyecto específico en la que se produzca la documentación necesaria para la ejecución de la estructura.

6.3. Teoría de proyecto y optimización

6.3.1. Problemas de minimización

Aun cuando el objeto de este texto no es establecer métodos para obtener soluciones estructurales óptimas[4] a un problema dado, sino establecer herramientas de proyecto que permitan evaluar la bondad de los diseños desde las primeras fases de éstos, es evidente que en determinadas ocasiones las soluciones podrán formularse como problemas de optimización, y los métodos aplicables a los mismos pueden por ello constituir una herramienta auxiliar de indudable interés. En esta sección se catalogan por ello de forma somera diversos métodos que pueden aplicarse a los problemas de minimización, tanto de funciones de una o varias variables —en número finito—, como de funcionales dependientes de una o varias funciones cuya expresión minimizadora se busca. El objeto de la descripción será considerar la posibilidad de aplicación de alguno o varios de los métodos revisados en la evaluación de diseños que nos interesa formalizar de cara a la construcción de una teoría de proyecto de estructuras.

[4]Se impone aquí una breve reflexión sobre los términos empleados. El sentido que la Real Academia asigna a la palabra *minimizar*: disminuir el valor de una cosa, o frivolizarla, no aconsejaría emplear este neologismo en el sentido matemático de hacer mínima una expresión. Y puesto que la raíz presenta analogías con la del término *último*, para el que existe ultimar como verbo que expresa la correspondiente acción, parecería correcto emplear *minimar* y *minimación* en las expresiones utilizadas para hablar de la acción de establecer un mínimo, y de la misma manera las expresiones *optimar* y *optimación* para referirse a las de establecer un óptimo. Habría una cierta *proximidad* con los términos aproximar y aproximación, estimar y estimación. . . . Dado que la literatura reciente no ha aceptado estos términos mantengo los más usuales pese a su mayor fealdad

En [Farkas, 1984] pgs.(29–50) puede verse una sucinta exposición de gran parte de los métodos citados. Una excelente obra para el estudio teórico y práctico de buena parte de los métodos de optimización en problemas lineales y no lineales, exceptuando los que explotan analogías de naturaleza estocástica tanto de procesos físicos como biológicos, es [Nash and Sofer, 1996]. En todo caso, el campo de la optimización[5] es un campo en rápida evolución, dada la importancia de los recursos involucrados en el mundo de las grandes corporaciones industriales y financieras, y la ventaja comparativa que puede aportarles una eficente aplicación de los mismos.

En cualquier problema de minimización —o de optimización—, se dispone de un objeto definido inicialmente, que debe poder modificarse de alguna manera, y se trata de buscar la modificación que produzca un mínimo en un cierto valor significativo. De este modo existirán

- una descripción paramétrica del objeto a investigar, que consiste, bien en describir el objeto en función de un conjunto finito de parámetros que pueden variarse (por ejemplo, un pórtico de longitud total dada y número de vanos conocido podría describirse en función de los valores arbitrarios —o variables— de las luces de los vanos), bien, en casos más generales, a través de un conjunto de funciones de campo que describen sus características (por ejemplo, la lámina de hormigón que cubre un recinto plano dado contenido en el plano horizontal OXY podría describirse a través de dos funciones $z(x, y)$ y $e(x, y)$ que asignarían a cada punto de coordenadas (x, y) del recinto la posición z y el espesor e de la lámina sobre dicho punto).

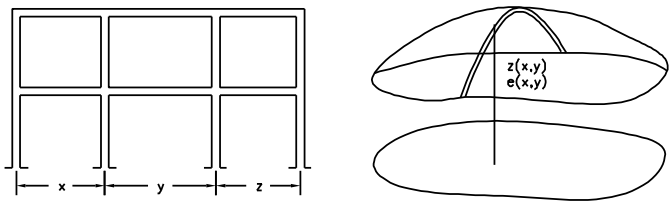


Figura 6.2: Descripción paramétrica de soluciones

- un método —a veces muy complejo— para describir el campo de validez de las soluciones que pueden admitirse para el objeto —en el primer ejemplo, las luces han de sumar la longitud total, y en el segundo, los esfuerzos combinados en la lámina han de ser menores a un cierto valor admisible—

- un método para obtener un valor —un escalar— que representa en un solo número alguna cualidad importante del objeto —la energía de deformación, el coste, el consumo de recursos no renovables, ... — Es evidente que debe poder obtenerse tal valor en cualquiera de las soluciones admisibles como función de los valores que se asignen a los parámetros que

[5] también denominado de *programación lineal y no lineal*, donde el término programación no se refiere a la creación de programas informáticos, sino al campo técnico–empresarial en el que surgen la mayor parte de los problemas de optimización, que es el ligado a la programación de actividades, procesos o recursos de las grandes corporaciones.

definen el objeto, —función de tantas variables como parámetros—. En el caso de que los objetos se hallen descritos no por parámetros variables, sino por funciones arbitrarias, dicho valor será función de las funciones establecidas, y por lo tanto estaremos hablando de un funcional.

Es con dichos elementos con los que se formula el problema de minimización, que consistirá en obtener el valor de las variables —o de las expresiones para las funciones— que describen el objeto para el que se alcanza el mínimo valor en el escalar elegido.

En su forma más general un problema de minimización puede plantearse rigurosamente de la siguiente manera (figura entre paréntesis la definición aplicable a la minimización de funcionales): Se trata de hallar el conjunto de valores (de expresiones) que han de adoptar una serie de variables (de funciones) $\boldsymbol{x}$ para minimizar una cierta función (un cierto funcional) de dichas variables (funciones) $f(\boldsymbol{x})$. Las variables (funciones) deben satisfacer un conjunto de restricciones —o ligaduras— descritas por ecuaciones $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ o por inecuaciones $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$. Se trata pues de hallar las $\boldsymbol{x}$ tales que

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \qquad \text{con} \\ g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 & j = 1, \ldots, m \\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0 & j = m+1, \ldots, p \end{cases}$$

(en el caso de funcionales las ligaduras de las funciones pueden estar restringidas a puntos o subdominios definidos).

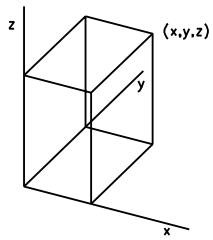
Las n variables (funciones) incógnita han de minimizar *la función objetivo (el funcional objetivo)* f sometidas a las p *ligaduras* $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{h}$. Según sea n pequeño o grande, y dependiendo de cual sea la complejidad de las expresiones de f, $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{h}$ —y sus derivadas—, pueden ser de aplicación métodos bastante diversos.

Podemos suponer que cada solución posible puede representarse como un punto en un cierto espacio (véase la figura 6.3). En ese caso el problema implicará la búsqueda de un punto en el espacio de las soluciones, que en el caso de minimizar funciones corresponde al espacio n–dimensional de las variables, y en el caso de minimizar funcionales corresponderá al espacio de dimensiones infinitas que englobe a la clase de funciones a las que sea aplicable el funcional, restringiendo dicha búsqueda a la *región de las soluciones aceptables o factibles* es decir, a la región del citado espacio delimitado por las restricciones $\boldsymbol{g}$, buscándose el punto que, cumpliendo las $\boldsymbol{h}$, minimice el objetivo f.

Los métodos aplicables pueden ser analíticos, numéricos, o pueden combinar ambos aspectos. En este último caso el método numérico se aplica a la resolución de una versión del problema original transformada por métodos analíticos.

Los métodos analíticos permiten en algunos casos obtener soluciones generales para problemas sencillos, soluciones que, por su forma, describen con claridad los aspectos implicados en la consecución del mínimo, al establecer la totalidad de las relaciones entre las diversas magnitudes en juego. Se trata de las soluciones preferibles en el caso de ser posibles.

Los métodos numéricos permiten obtener soluciones particulares para problemas concretos, si bien en la mayoría de los casos tales soluciones no permiten la extrapolación de conclusiones a problemas nuevos o próximos al original. Las soluciones numéricas tienen siempre un cierto grado de oscuridad, tanto mayor cuanto mayor es la complejidad de las funciones implicadas.



Una solución $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ para un problema de tres parámetros puede ser representada por un punto.

Figura 6.3: Espacio de las soluciones

En los casos en que pueden aunarse desarrollos analíticos con métodos numéricos, que son muchos, se combina el planteamiento analítico de ciertas condiciones abordando por esta vía el tratamiento de algunas de las planteadas en el problema, con el recurso a métodos numéricos para la obtención de una solución al conjunto de condiciones. Los llamados *criterios de optimidad*[6] corresponden a situaciones de este tipo, pues combinan el desarrollo de las condiciones que caracterizan al óptimo —los *criterios de optimidad*—, construidos usualmente por métodos variacionales, multiplicadores de Lagrange, etc., con métodos numéricos de aproximación —métodos de colocación como los de mínimos cuadrados, etc.—. En todo caso dichos métodos exigen finalmente el empleo de procedimientos numéricos para resolver los coeficientes que definen la aproximación.

6.3.2. Métodos aplicables a problemas de minimización de funciones

Método analítico

Se trata evidentemente del cálculo diferencial. El planteamiento es sobradamente conocido: caso de existir diferenciabilidad suficiente, se caracteriza el óptimo —el mínimo de la función— por corresponder a un punto de derivada (derivadas parciales) nula y derivada(s) segunda(s) creciente(s). Si pueden resolverse las ecuaciones resultantes de tales condiciones satisfaciendo las ligaduras al mismo tiempo, la solución analítica está conseguida.

Se trata de una situación deseable, pero poco usual: no es habitual poder reducir un problema complejo real a este formato salvo mediando importantes simplificaciones, tanto por la complejidad de las expresiones que permiten apuntar estimaciones de la función objetivo, como por las importantes fuentes de singularidad matemática que suponen las restricciones en la mayor parte de los casos reales.

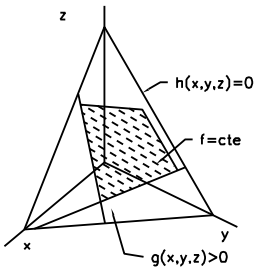
Métodos numéricos

Consideraremos sólo los métodos numéricos multivariables, pues minimizar problemas de una sola variable es relativamente trivial, incluso en casos de

[6] Optimality criteria.

importantes irregularidades. Son métodos muy diversos, dependiendo de las relaciones implícitas en la expresión definitiva de f.

1. El caso más sencillo[7] corresponde a la clase de problemas en que las funciones $f, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ son funciones lineales, de modo que la región de las soluciones aceptables queda delimitada por hiperplanos en el espacio de las soluciones, en el que define un poliedro n–dimensional. En esta región poliédrica el mínimo corresponde, bien a un vértice de dicho poliedro si la solución es única, bien a una arista, una cara ... si la solución es múltiple. Tales problemas se tratan con los métodos de *programación lineal*, de los que tratan numerosos textos a los que ya hemos aludido en el apartado 5.2.2. Por enunciar en forma somera la familia de métodos más difundida, *el método simplex*, diremos que se trata de métodos que buscan la forma más certera de avanzar por los vértices del poliedro partiendo de un cierto vértice inicial, de forma que en cada paso se produzca una disminución en la función objetivo. El *método simplex* garantiza la obtención de un vértice solución, si existe, o la caracterización del problema como no factible, o no acotado, en un número finito de pasos. En efecto, Cuando son



Búsqueda del punto (x, y, z) que hace f mínimo.

Figura 6.4: Función y restricciones lineales

lineales, las condiciones h_j determinan (hiper)planos en el espacio de las soluciones; las condiciones g_j determinan en éstos semiplanos, cuya intersección genera los polígonos (hiperpoliedros) que contienen la región de las soluciones aceptables. Finalmente, la función f genera líneas de nivel rectas (hiperplanos) y paralelas, por lo que el mínimo coincide en general con un vértice, como se observa en la figura 6.4. Si los planos de nivel son paralelos a alguno de los hiperplanos del poliedro —aristas, caras ... — el nivel que representa el mínimo correspondería no a un punto, sino a una región que contendría diferentes soluciones, equivalentes en términos de la función objetivo, y que podrían representarse como combinación lineal de

[7] En términos descriptivos aunque no necesariamente en términos operativos como muestra la larga historia transcurrida hasta nuestros días desde las primeras ideas de Kantorovich (1930) y V. Neumann (1944) que permitieron a G. B. Dantzig la primera formulación del método simplex en programación lineal en 1947, cuyas versiones actuales siguen batiendo en eficacia en problemas reales a métodos más recientes y teóricamente más eficientes como el del los elipsoides de L.G. Khachiyan de 1979.

algunas de ellas usadas como base de representación. El vértice obtenido con *simplex* pertenece obviamente a dicha región.

2. En segundo lugar de dificultad estarían aquellos problemas que pueden reducirse a una forma caracterizada por las condiciones siguientes: 1) no existen las restricciones g, h, —en general por haberse incluido en la función a minimizar— y, 2) la función objetivo resultante f es una forma cuadrática de las variables del problema reducido. En tal caso la obtención del mínimo es inmediata. Para ello se obtiene el desarrollo en serie de Taylor de la función f hasta su segundo término, y por tratarse de una forma cuadrática, el desarrollo dará el valor exacto de la función, de modo que

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla^T f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T \nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

donde

$$\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}),$$
$$\nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Obtener el mímimo exigirá que la derivada parcial de la función respecto de cada variable sea nula, de modo que

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} + \nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$$

ecuación que puede escribirse en la forma

$$-\nabla f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

que no es más que un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas que resuelve el problema si se conocen en algún punto inicial $\boldsymbol{x}_0$ los valores de $\nabla f(\boldsymbol{x})$ —gradiente de la función f, también denominado *vector de residuos*[8]— y de $\nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x})$ —matriz *hessiana* de f[9]—. Nótese que también podría obtenerse el mínimo planteando como condición la anulación del gradiente en el mínimo, $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$, y resolviendo el sistema así obtenido. Pero esto exige conocer el desarrollo de $\nabla f(\boldsymbol{x})$, mientras que para la aplicación anterior basta conocer su valor en un punto inicial, junto con el valor de $\nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x})$ en el mismo punto, que son problemas de solución usualmente más sencilla y sistemática.

[8] La denominación procede del contexto de los métodos de análisis aproximado. En análisis de estructuras el funcional es la energía potencial total y los parámetros variables son los desplazamientos de unos ciertos nodos, de modo que para cada estado posible de la estructura, la derivada de la energía respecto de dichos desplazamientos —los residuos— no es más que el vector de carga no equilibrada, o residual en dicho estado, diferencia entre las cargas aplicadas y la respuesta de la estructura.

[9] Matriz que en análisis de estructuras corresponde a la *matriz —de rigidez— tangente* pues en cada estado de desplazamiento de la estructura, contiene la derivada de las fuerzas de la estructura sobre los nudos respecto de los movimientos, es decir, la rigidez de la estructura.

3. El siguiente grado de complejidad correspondería a los problemas de varias variables sin ligaduras. Muchos de los problemas con ligaduras pueden ser reducidos a esta clase mediante el adecuado tratamiento de aquellas. Para esta clase de problemas pueden usarse métodos que (1) exploren f directamente —métodos de búsqueda directa— y métodos que (2) aprovechen en la búsqueda el conocimiento de las derivadas de f.

   Entre los primeros tendríamos métodos que realizan la búsqueda con procedimientos basados en símiles de procesos naturales de carácter determinista, como el método de Nelder–Mead —conocido originalmente como simplex, aunque reseñado en textos recientes como *método de búsqueda multidireccional* para evitar la confusión con el método de igual nombre en problemas de programación lineal— o de carácter probabilista, como son el recocido simulado o los algoritmos genéticos. En el primero de ellos el símil es el de un objeto de tamaño variable rodando valle abajo en el espacio n–dimensional del problema, y adoptando dimensiones grandes cuando el descenso es rápido, lo que le permite salvar pequeños mínimos locales. Las dimensiones del objeto se reducen cuando no se logran mejoras, para poder alcanzar el fondo de fosos estrechos. El recocido simulado[10] emula procesos termodinámicos en los que se alcanzan configuraciones de mínima energía, como en metales que solidifican, en los que a altas temperaturas las configuraciones moleculares tienen bastante libertad y desorden pero en los que, a medida que disminuye la temperatura, si lo hace lentamente, el sistema adopta las configuraciones ordenadas de menor energía, que son precisamente las de mayor probabilidad. De este modo se construyen *procesos* estocásticos que simulan la evolución en la probabilidad de transición de una configuración a otra según desciende la *temperatura* del sistema. Siempre se aceptan transiciones a situaciones de menor valor en la función objetivo, pero a altas temperaturas la probabilidad de aceptar una transición en la que la función objetivo aumenta es relativamente alta, reduciéndose dicha probabilidad según desciende la temperatura. Esto permite al algoritmo explorar inicialmente amplias regiones del espacio de las soluciones, adoptando por tanto situaciones globalmente más adaptadas para alcanzar los mínimos globales cuando la temperatura desciende. El algoritmo genético emula la evolución de generaciones sucesivas de una población en la que la capacidad de supervivencia y reproducción de cada individuo está asociada a su mejor adaptación —al mejor valor de la función obtenida con sus propiedades individuales— y en las que las cualidades de distintos individuos se cruzan para la generación siguiente, obteniéndose de este modo grupos de población de cualidades semejantes agrupados en torno a propiedades comunes que corresponden a mínimos de la función.

   Entre los segundos tendríamos los métodos de exploración orientada por el gradiente de f —línea de máxima pendiente, gradiente conjugado ...— y los orientados por las primeras y segundas derivadas de f. El método de Newton o de Newton–Raphson, en sus diferentes modificaciones aplica de forma iterativa —e incremental en muchos casos— el segundo de los pro-

[10] Una magnífica exposición de su fundamentación y sus ejemplos típicos de aplicación,así como una excepcional exploración de sus posibilidades en la optimización de estructuras puede encontrarse en [Vázquez, 1994].

cedimientos numéricos citados en este apartado. Son métodos aplicables en situaciones en los que la función explorada varía de forma relativamente *suave*.

Los métodos *cuasi newtonianos* aplican idéntico proceso empleando aproximaciones de la matriz *Hessiana* $\nabla\nabla^T f$, o de su inversa, aproximaciones que se obtienen en cada caso por procedimientos recursivos diversos. Un repaso a las diversas relaciones recursivas utilizables puede verse en [Himmelblau, 1971].

4. Los problemas más complejos son aquellos dependientes de varias variables con condiciones de ligadura. Estas son origen de una importante complejidad, particularmente en el caso de las representadas por desigualdades, que implican discontinuidades.

   Los métodos aplicables son de muy diverso tipo. Cabe citar como clásicos los que emplean criterios de optimidad, el método SUMT[11], los derivados de la teoría del control [Carmichael, 1981], o los métodos de exploración combinatoria con restricción sobre el árbol de búsqueda, propios de la Inteligencia Artificial.

   Por su interés describimos los dos primeros con más detalle.

   En el primero de los casos, para determinar los *criterios de optimidad*, el problema inicial

$$\begin{cases} \text{mín}_{\boldsymbol{x}}\, f(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \\ g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0 & j = 1, \ldots, m \\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0 & j = m+1, \ldots, p \end{cases}$$

   se transforma utilizando *variables de holgura* Y_j de modo que las condiciones de ligadura inicialmente definidas por desigualdades queden descritas siempre en términos de igualdades

$$g_j(\boldsymbol{x}) + Y_j^2 = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

   escribiéndose entonces

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda_j, Y_j) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j [g_j(\boldsymbol{x}) + Y_j^2]$$

   donde λ_j son los multiplicadores de Lagrange correspondientes a cada una de las ligaduras del problema, y donde se identifica $g_j(\boldsymbol{x}) \equiv h_j(\boldsymbol{x}), \quad Y_j \equiv 0$ para $j = m+1, \ldots p$. Dichos multiplicadores pueden interpretarse como gradientes de la función objetivo en direcciones ortogonales a las barreras establecidas por las restricciones definidas por las desigualdades, y en las interpretaciones duales que pueden establecerse en tales problemas aportan usualmente interesantes puntos de vista sobre éstos.

   Los criterios que determinan el mínimo local —derivados del Cálculo Diferencial— son

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \nabla f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{(i)}$$

[11] [Fiacco and Mc Cormick, 1968]

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_j(\boldsymbol{x}) + Y_j^2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial Y_j} = 2\lambda_i Y_j = 0$$

De este modo, para un estado en que una cierta restricción es activa, la variable de holgura es en ese caso nula, y por lo tanto $Y_j = 0, \quad g_j = 0$, debiendo ser en tal caso $\lambda_j \geq 0$, puesto que al tratarse de un mínimo debe ser $\frac{\partial^2 L}{\partial Y_j^2} = 2\lambda_i \geq 0$. En estados en que, por el contrario, una cierta restricción no es activa —o es pasiva—, $Y_j \neq 0$, y $\lambda_j = 0$ de modo que las dos últimas condiciones pueden reescribirse en la forma

$$\lambda_j \geq 0, \quad \lambda_j g_j = 0.$$

Estas ecuaciones, junto con la (i), constituyen los criterios de optimidad aplicables a los problemas abarcados por los teoremas de Karush–Kuhn–Tucker (KKT). La primera condición establece que en el óptimo, el gradiente de la función objetivo se halla contenido en el cono de las normales a la superficie que delimita la región aceptable. Si todas las restricciones son activas simultáneamente, se obtiene un sistema de $n + p$ ecuaciones, con las $n + p$ incógnitas x_i, λ_j, a saber

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \nabla f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}) = 0$$
$$g_j = 0$$

El segundo de los métodos reseñados, SUMT —abreviatura de la expresión *Sequential Unconstrained Minimization Technique*— consiste en convertir el problema original con ligaduras en una secuencia de problemas sin ligaduras, definiendo como función objetivo una función P, generada en la forma siguiente —existen versiones alternativas—:

$$P(\boldsymbol{x}, r_k) = f(\boldsymbol{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(\boldsymbol{x})} + r_k^{-1/2} \sum_{j=m+1}^{p} h_j^2(\boldsymbol{x})$$

En dicha expresión los r_k son *coeficientes de penalización* que toman sucesivamente valores decrecientes que tienden a 0, y los términos en que éstos intervienen se denominan *funciones de penalización*. Existen versiones parecidas, que utilizan otras expresiones para las funciones de penalización. En el texto citado arriba, y en [Rao, 1978] figura el análisis de la convergencia del método.

El método supone en cierto modo una técnica de *regularización* o de "suavización" de las discontinuidades derivadas de la existencia de inecuaciones, y como tal es de aplicación posible en dichas situaciones. Permite además que en la búsqueda del óptimo se exploren regiones no aceptables con la ventaja de facilitar el acercamiento al óptimo global más rápidamente cuando las restricciones lo sitúan en una región poco accesible del espacio de búsqueda.

La descripción de los métodos de exploración combinatoria, y las diversas técnicas empleadas para limitar la explosión combinatoria en tales métodos es tarea que desborda los objetivos de este apartado. Baste señalar que se trata de métodos próximos o que emplean sistemáticamente técnicas de la denominada Inteligencia Artificial. En estos métodos la exploración se realiza avanzando paso a paso a partir de algún estado aceptable inicial, y modificando sucesivamente el estado —los valores de las variables— mediante reglas de cambio de estado más o menos *inteligentes*, y manteniendo un registro de los pasos realizados así como una medida de la *bondad* de cada estado alcanzado, de modo que, si la exploración lleva a un camino sin salida, se produce un *retroceso* al mejor estado alternativo al que se utilizó para iniciar tal camino. La exploración se reanuda a partir de dicho estado, y la búsqueda se termina cuando se satisface un cierto criterio de convergencia.

6.3.3. Métodos aplicables a problemas de minimización de funcionales

Método analítico

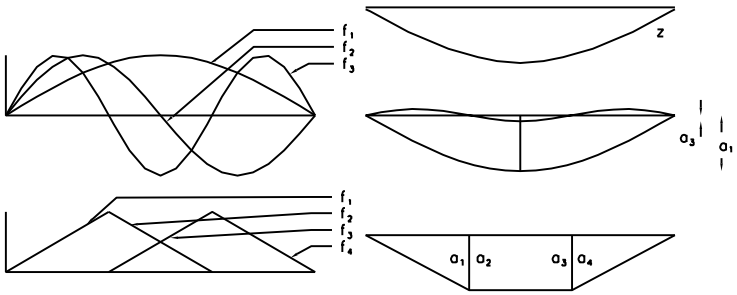
Debe emplearse el aparato del cálculo variacional. La teoría demuestra que, si hay diferenciabilidad suficiente, un mínimo en un funcional implica que el gradiente del funcional para la función (funciones) correspondientes al mínimo ha de ser nulo, o lo que es lo mismo, que el diferencial del funcional en el mínimo es nulo para variaciones en cualesquiera direcciones en que puedan ser modificadas las funciones que verifican dicho mínimo. Por lo tanto la variación del funcional es nula para cualesquiera variaciones *admisibles* en tales funciones. De este modo queda caracterizado el mínimo, y pueden ser aplicables diversos métodos analíticos a la obtención de la solución, siendo el más clásico el procedimiento basado en resolver las ecuaciones diferenciales que expresan las condiciones del mínimo en forma local —las ecuaciones de equilibrio para el caso de buscarse el mínimo en la energía potencial de un sistema estructural, por poner un ejemplo—. Estas se denominan Ecuaciones de Euler del problema, y su integración, caso de ser posible para las ligaduras del problema, lo resuelve. No es éste lamentablemente el caso de los problemas usuales.

Métodos numéricos

En este caso se trata de obtener la representación numérica —aproximada— de las funciones buscadas. Para ello es preciso previamente restringir el espacio de búsqueda —que comprende en principio la clase de todas las funciones a que es aplicable el funcional— a un subespacio del mismo en el que quepa suponer exista una función suficientemente próxima a la solución que aproxima. Es útil el empleo de subespacios vectoriales del espacio de búsqueda, subespacios en los que todas las funciones contenidas puedan expresarse como combinación lineal de un número finito de ellas —que constituyen una *base* del mismo— En este caso la búsqueda se aplicará a la determinación de los coeficientes de la combinación que corresponde a la mejor aproximación. De este modo el problema consta de tres partes, a saber,

1. seleccionar el subespacio de búsqueda —o lo que es lo mismo, seleccionar las funciones que forman la *base* del mismo—,
2. formular las condiciones que proporcionan la mejor aproximación a la solución en dicho subespacio, y
3. determinar los coeficientes numéricos que corresponden a tales condiciones.

Aunque se comprende que los tres aspectos se hallan fuertemente relacionados dependiendo del tipo de problema, es fácil ver que solventar los dos primeros significa transformar el problema original en un problema de minimización de una función de varias variables —que serán los coeficientes numéricos buscados—, por lo que la última parte puede ser abordada por cualquiera de los procedimientos descritos en el apartado anterior.



$z \approx \sum a_i f_i$, con funciones f definidas en todo el dominio (1), o definidas por subdominios (2).

Figura 6.5: Funciones de forma locales o globales

La selección de las funciones *base* del subespacio de búsqueda, las *funciones de forma*, es el primero de los problemas. Estas pueden hallarse definidas de forma completa en todo el dominio del problema, o bien estar sólo definidas por subdominios. Una vez elegidas, es usual plantear como condiciones de la mejor aproximación aquellas que hacen mínimo el error de la misma, es decir, las que minimizan la distancia entre el resultado aproximado y la solución. De este modo se llega con naturalidad a la idea de los residuos ponderados, que consisten en integrar el error cometido en cada punto del dominio, ponderándolo mediante procedimientos diversos: mínimos cuadrados, mediante las mismas funciones que forman la base del subespacio de búsqueda, colocación por puntos, etc., procedimientos que desembocan, según los casos, en métodos como el de los elementos finitos —funciones de forma definidas por subdominios que se emplean igualmente para la ponderación—, las diferencias finitas —colocación por puntos—, etc. Un mayor grado de detalle requriría una extensión inapropiada para los objetivos de inventario de este texto, por lo que no se desarrolla ulteriormente esta exposición. Un mayor desarrollo puede encontrarse en [Zienkiewicz, 1980].

6.3.4. Métodos a utilizar en el desarrollo de una teoría de proyecto

Existe un gran número de herramientas aplicables a los problemas de optimización. Sin embargo muchas de ellas son totalmente inaplicables a los objetivos descritos: se trata aquí no sólo de determinar las mejores soluciones, sino además de medir la bondad de ésta según nos apartamos del óptimo, de modo que puedan considerarse las consecuencias de decisiones que, aun alejando el diseño de los óptimos puramente estructurales, pueden ser beneficiosas desde cualquiera de los otros puntos de vista que ha de considerar el arquitecto[12]. Pero además, tal y como se planteó al presentar los objetivos de dicha teoría, las herramientas elegidas han de servir de base para la evaluación de las estructuras consideradas en la propia exploración geométrica de las mismas.

Desde esta perspectiva, es claro que los métodos analíticos pueden aportar herramientas de reflexión apropiadas a los objetivos propuestos, y que serán por tanto los más apropiados a éstos, a cambio de simplificar en buena medida los problemas a abordar. Ahora bien, de entre los métodos numéricos descritos, también el más trivial de todos ellos —la exploración numérica de campos de valores admisibles, mediante la realización de tablas...— puede aportar información capaz de ser interiorizada y empleada en la creación de reglas de diseño.

En este texto se emplean básicamente los dos últimos métodos citados en la medida en que puedan ser útiles, y de manejo sencillo, mientras que, al contrario, no se hace empleo de los métodos numéricos más generales. Pues si bien éstos pueden ser utilizados más que provechosamente en las tareas de investigación de la teoría, en la medida en que soluciones particulares a colecciones de problemas pueden aportar luz sobre cuestiones más generales, son métodos que sin embargo no pueden tener un papel relevante en ella dada su escasa capacidad explicativa.

De los métodos aplicables, el analítico aplicado a la realización de análisis genéricos de estructuras correspondientes a tipos predefinidos es con mucho el de mayor capacidad explicativa y, por tanto es el que consideramos a continuación.

6.4. Análisis genérico. Tipos, formas y parámetros

6.4.1. El análisis como herramienta de la teoría de proyecto

El empleo del análisis como herramienta de la teoría del proyecto ha sido precedido por una larga historia, en la que ha desplazado a procedimientos más intuitivos o experimentales.

Si repasamos los métodos de proyecto a lo largo de la historia, podemos reconstruir un proceso que se inicia en los procedimientos de prueba y error empleados colectivamente en la definición de tipos convencionales de construcción.

Tales tipos convencionales darían paso a reglas geométricas de diseño, usualmente de tipo proporcional, en las que se expresaba la experiencia acumulada. Cabe señalar que el éxito de las reglas de proporción está basado en el comportamiento verdaderamente proporcional de muchos de los problemas más importan-

[12] Y ello no se resuelve tampoco probablemente mediante complejos análisis de sensibilidad (*sensitivity*) en los entornos del óptimo.

tes de los constructores antiguos, como es el de la estabilidad de las bóvedas. La importancia creciente de problemas no proporcionales —en torres o barcos, por ejemplo—, unida al racionalismo gestado en el Renacimiento, fueron las bases de la feroz crítica al empleo de las reglas de proporcionalidad que inició Galileo [Galileo, 1638]. Dicha crítica no sería posteriormente ajena al desarrollo de nuevas ramas de la Matemática, que, en detrimento de la Geometría, favorecerían descripciones cada vez más abstractas de los fenómenos del comportamiento mecánico de las construcciones. Y así, mientras el uso de los materiales tradicionales mantenía la práctica de formular y emplear reglas de proporción, que se mantuvieron pese al incipiente desarrollo de la teoría de la resistencia de materiales iniciado por Galileo, durante más de dos siglos después de su arranque, el desarrollo del análisis matemático preparó la liquidación de este proceder, que se produjo violentamente con la aparición y el desarrollo de los materiales de la revolución industrial. En efecto, a dichos materiales habrían de corresponder proporciones radicalmente nuevas que, sin embargo, nunca serían exploradas, dado el descrédito teórico a que Galileo las sometió.

Sin embargo no puede despreciarse dicho enfoque, como demuestran no sólo la validez de las reglas antiguas de construcción, o en otros campos de la física en los que las relaciones complejas de proporción que pueden deducirse con las técnicas del análisis dimensional han demostrado su utilidad. De hecho cabe decir que cualquier teoría física debe basarse en algún sistema de medida, y todo sistema de este tipo no puede basarse más que en proporciones entre la magnitud efectivamente medida y la empleada como unidad. Una adecuada elección de la magnitudes a considerar, y de las unidades empleadas puede ser extremadamente eficiente en la presentación de dichos problemas en formatos que hagan fácilmente percibible la evolución geométrica de las soluciones, al modo que lo hacían las reglas de proporción para acotar las soluciones posibles.

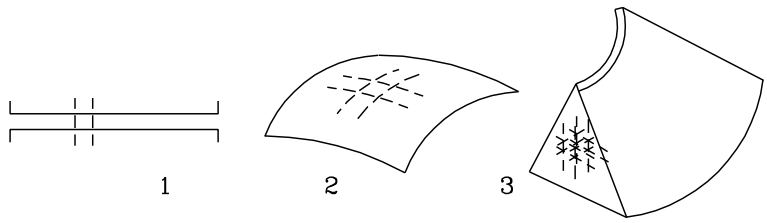
Dicho formato es tanto más fácil de establecer cuanto más próximos se encuentran los problemas tratados, por lo que puede comprenderse que el desarrollo del método propuesto, la aplicación de las técnicas del análisis a modelos genéricos para obtener conclusiones también generales, aconseja establecer una clasificación de tipos definidos por el uso.

6.4.2. Tipos estructurales según el uso

Optar por una clasificación de las estructuras en función del uso a que se destinan es mejor desde el punto de vista del proyecto que otras en que el tipo se define por sus características geométricas o mecánicas en la medida en que por un lado permite comparar estructuras dispares en competencia y por otro resultan mucho más claramente definidos los condicionantes externos a la estructura. Otras clasificaciones tipológicas clásicas, si bien menos adecuadas al planteamiento propuesto quedan recogidas en las figuras contiguas. Se tratan de clasificaciones establecidas con criterios de análisis estructural que como hemos visto es una importante herramienta en el proyecto, pero herramienta, para una actividad cuyo propósito es otro más cercano a las prestaciones requeridas desde el uso que a los requisitos meramente analíticos.

En general vamos a manejar como tipos diferenciados, de acuerdo a la figura 6.8, los siguientes:

1. Estructuras de pisos.



1: Lineales. 2: Superficiales. 3: Masivas.

Figura 6.6: Tipos según familias de cortes necesarias para el análisis

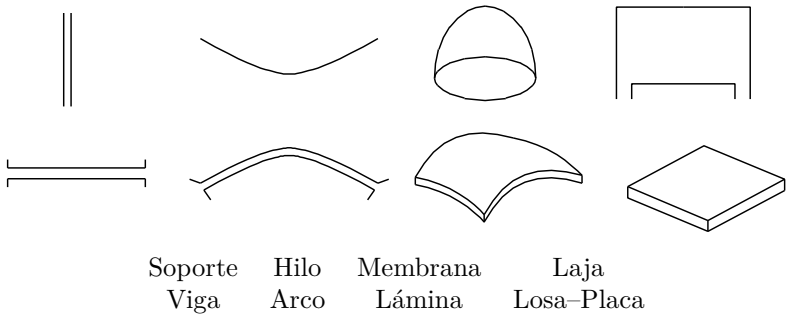


Figura 6.7: Tipos según comportamiento estructural

2. Estructuras de cubierta.
3. Estructuras que unen dos puntos (Puentes).
4. Estructuras que sitúan un punto (o un elemento) en el espacio.
5. Estructuras de contención de materiales disgregados.

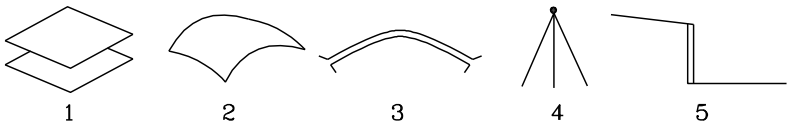


Figura 6.8: Tipos según uso

El primer tipo estructural abarca la mayor parte de la producción usual, y está fuertemente condicionado por tener que mantener superficies de planos rígidos paralelos y de relativamente pequeño espesor. Se trata de un condicionante muy fuerte para una estructura, ya que en la mayoría de los casos su geometría no vendrá dictada por requisitos puramente estructurales, sino por razones del uso o la estética del proyecto. La contrapartida a estas fuertes limitaciones en el proyecto es que pueden definirse estas estructuras con muy pocos parámetros, y en consecuencia pueden establecerse, como veremos más adelante, criterios muy precisos sobre las relaciones existentes entre los valores de los parámetros que definen la estructura y el consumo de material. Este tipo estructural permite, en mayor medida que los otros, presentar el problema estructural con independencia de la solución adoptada. Ello corresponde más a un problema clásico de cálculo, y facilita la resolución del mismo.

En orden creciente en los siguientes tres tipos, la solución adoptada influye en las acciones sobre la estructura, produciéndose una cierta polarización de soluciones que no son tan fácilmente comparables entre sí. El último tipo, pese a su interés práctico que queda de manifiesto en ser uno de los destinatarios de varias de las reglas clásicas de proporción, no tiene sin embargo excesivo interés desde la perspectiva arquitectónica.

Pero es desde esta perspectiva desde la que la segunda familia, la de las estructuras de cubierta, alcanza su máximo interés. Pues efectivamente las cubiertas de los edificios singulares incorporan en un sólo objeto, cuyas cualidades físicas se determinan en buena medida en base a los requisitos estructurales, un buen cúmulo de roles arquitectónicos añadidos, entre los que el carácter simbólico del edificio o área que cubren juega un importante papel. Desde esta perspectiva, la exploración sobre la capacidad que la forma aporta al comportamiento de la estructura en las cubiertas es del máximo interés, no sólo para la teoría del proyecto de estructuras sin también para la crítica arquitectónica más general. Pues efectivamente la forma no sólo estará en la base de la estabilidad de la estructura sino que ocupará un papel central en la significación del espacio contruido, uno de cuyos aspectos básicos es su propia estabilidad estructural, conviertiendo por ello a la estructura no sólo en la responsable de la estabilidad,

sino en signo explícito de ésta, en instrumento privilegiado para hacer percibir la *firmitas* al observador.

Conocer, por tanto, las cualidades de la forma, relativamente libre, que se asocian a las soluciones de cubierta se convierte en un elemento de extremado interés, al ser susceptible de aportar mayor riqueza a la reflexión arquitectónica ligada al proyecto.

6.5. La medida del consumo en estructura

En su definición más sencilla, una estructura es el vehículo material que permite establecer un sistema de fuerzas en equilibrio, que permite poner en comunicación entre sí dichas fuerzas. Éstas serán las cargas derivadas del uso, incluyendo las correspondientes al peso propio de la estructura, que deben equilibrarse con las reacciones del terreno.

Las distintas alternativas que materialicen el equilibrio estable presentarán distintos consumos de material. Podemos inicialmente concebir configuraciones estructurales con cierta independencia respecto del material a emplear, pero sin embargo es evidente que la forma será determinante en su consumo. En el próximo capítulo se tratará de establecer las magnitudes que gobiernan el consumo de material estructural, así como principios que permitan minimizar éste.

Es inevitable referirse aquí a la relación entre los diferentes objetivos de minimización que pueden considerarse: empleo de la menor cantidad de material, o alternativamente consecución del coste mínimo, y mejor aún, consecución del consumo mínimo en productos no renovables, consumo mínimo en energía, etc. medidas que no sólo no son equivalentes, sino que incluso no son conmensurables entre sí. El objetivo racional es establecer como base de minimización el mínimo consumo de materiales y energías no renovables, y un coste proporcionado en esfuerzo humano; pero como paso parcial hacia dicho objetivo puede estableceerse como intención inicial del análisis la búsqueda de las condiciones que reducen los consumos de material. Mejor aún, en la medida en que pueden establecerse las características de la estructura —incluso de consumo o de inversión material necesaria en ella— con relativa independencia de las cualidades concretas del material que en ella se emplee, —o con más precisión, asociadas sólo a parámetros genéricos de definición del material— una parte sustancial de la reflexión deberá dedicarse a la búsqueda de las condiciones que reducen la magnitud de la estructura prevista, abstraída de las características del material concreto a emplear en ella. Debiendo realizarse aparte, e independientemente, la reflexión sobre las inversiones relativas requeridas por cada solución material para las soluciones estructurales estudiadas, y *minimizadas* si ha lugar.

En general, si todos los puntos de un elemento estructural se encuentran trabajando a la misma —máxima— tensión, se obtiene una mayor eficiencia en el empleo del material. Siempre que estemos en condiciones de organizar una estructura a base de elementos comprimidos o traccionados, estaremos en condiciones de acercarnos a un bajo consumo de material. Por el contrario, y aparte de las consideraciones explícitas que realizaremos más adelante para la flexión, ésta da lugar a tensiones variables en la sección, y por lo tanto a aprovechamientos deficientes del material.

En piezas de hormigón o acero solicitadas en flexión, las tensiones de tracción

y compresión se encuentran muy concentradas, siendo fácilmente sustituibles sin cometer gran error por resultantes situadas a una distancia z, denominada *brazo (de palanca)*. En otros materiales —madera— puede hacerse algo parecido: basta situar las resultantes en su posición en el bloque de tensiones —el centro de gravedad de éste—, si bien en este caso no existe ni concentración ni uniformidad de tensiones.

En la medida en que siempre podemos traducir el comportamiento de una estructura a una serie de recorridos de fuerzas según las directrices de los elementos —más adelante veremos con detalle cada caso—, una excelente magnitud apropiada para medir estructuras en los casos en que éstas están constituidas por barras sometidas a tracción o compresión será $\sum |F|l$, que mide simultáneamente fuerzas y recorridos. Se trata de una magnitud escalar a la que denominamos *cantidad de estructura* pues como veremos existe una relación inmediata entre tal magnitud y el volumen de material consumido en la estructura[13].

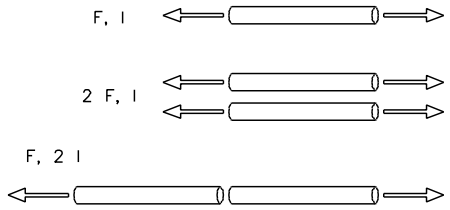


Figura 6.9: Consumo en estructura

[13]El ejemplo de la figura 6.9 recuerda vivamente la definición que Descartes maneja de fuerza como base de su concepción de la estática —concepto equivalente a nuestro actual concepto de trabajo— en carta a Mersenne de 12 de Sept. de 1938, citada en [Duhem, 1905], en la que afirma que *la misma* fuerza *que puede levantar un peso, por ejemplo de 100 libras a una altura de dos pies puede también levantar uno de doscientas libras a la altura de un pie.*

Capítulo 7

Cantidad de estructura

Hemos establecido en el capítulo anterior la necesidad de medir la inversión realizada en estructura como modo de caracterizar y comparar la bondad de éstas, y hemos presentado una magnitud para ello que reúne magníficas cualidades. Las cualidades no son sólo estéticas —se mide en términos de trabajo o energía, que es una de las magnitudes de más potencial teórico— ni prácticas —veremos que está íntimamente ligada a los volúmenes y pesos estructurales— Se trata de una magnitud cuyas propiedades, y cuya independencia respecto del material considerado, la hacen idónea para una exploración abstracta sobre las propiedades estructurales ligadas a la forma.

En este capítulo se analizan las propiedades fundamentales de dicha magnitud.

7.1. Definiciones y estimación

7.1.1. Definiciones básicas

Vamos a precisar el lenguaje necesario para establecer los principios básicos.

En primer lugar denominamos **Problema de Maxwell** al que consiste en definir una estructura capaz de poner en equilibrio entre sí a las fuerzas de un sistema en el que tanto la posición como la magnitud de las mismas están definidas. En dicho problema es evidente que la resultante y el momento resultante de todas las fuerzas es nulo pues de otro modo el equilibrio no es posible. La función de la estructura será conectar dichas fuerzas entre sí, constituir la ligazón física que permita materializar tal equilibrio.

Dicho sistema incluye, tal como está formulado el problema, todas las fuerzas externas del mismo, tanto acciones como reacciones.

Se trata de un problema teórico en la medida en que la existencia y la forma de la estructura tienen una influencia considerable en la magnitud y posición de tales fuerzas —y ello sin considerar que muchas de ellas son imprevisibles, por más que existan formas convencionales normadas de considerarlas—. Sin embargo es posible en tipologías dadas de estructuras acotar las fuerzas a que se somete a la estructura, por lo que puede en éstas plantearse uno o varios Problemas de Maxwell que caractericen su comportamiento.

Llamaremos **Estructura de Maxwell** a la estructura que resuelve un Problema de Maxwell y que cumple la condición siguiente:

- Está constituida por elementos que trabajan uniaxialmente, en tracción o compresión.

Llamamos finalmente **Estructura estricta** a toda estructura de Maxwell tal que:

- En todo punto de la estructura el dimensionado es estricto, es decir, si la estructura está realizada con un material dado, en todas las secciones de la misma el material se halla sometido a la máxima tensión compatible con la seguridad —σ de servicio en todos los puntos—[1].

Se trata nuevamente de estructuras teóricas, en la medida en que en la realidad no es usual cumplir dichos requisitos: Los diseños no son estrictos tanto por razones derivadas de la necesidad de rigidez —deformaciones limitadas, estabilidad,... — como por razones constructivas —dimensionados mediante sección constante,... —.

Las piezas en flexión no encajan con facilidad en la descripción, pues mantienen tensiones variables en la sección, muchos de cuyos puntos se encuentran sometidos a estados planos no uniaxiales,... Existen sin embargo estructuras en flexión en que sí puede hacerse —las estructuras trianguladas—, y puede intentar modelarse la pieza continua mediante conceptos asociados a alguna de dichas estructuras, con las salvedades que sean necesarias, por ejemplo emulando los estados biaxiales de cortadura por una doble familia de estados de tracción y compresión.

Existen estructuras y componentes estructurales que basan su comportamiento en estados bi o triaxiales. Sin embargo forman una familia que supone un porcentaje muy limitado del total de estructuras construidas, y a menudo el uso de materiales heterogéneos lleva a trabajar en ellas con estados uniaxiales pese al global de la estructura: piénsese en los armados en placas o láminas de hormigón, que suponen un importante componente estructural sometido a tracción —o compresión en algunos casos— uniaxial. Piénsese igualmente que las mayor parte de las soluciones actuales de estructuras con comportamiento global superficial están de hecho construidas con mallas de barras aisladas —triangulando superficies o tetraedrando volúmenes—.

En estas condiciones podemos definir un importante concepto, asociado en gran medida al volumen y al coste de la estructura:

Cantidad de estructura, W es la integral extendida a toda la estructura de los productos $|N|\,ds$ siendo N el esfuerzo axial en la "sección" y ds el elemento longitudinal de pieza en el punto considerado.

$$W = \int |N|\,ds \tag{7.1}$$

Se entiende que han de considerarse valores absolutos para $|N|$ de modo que se obtengan valores positivos tanto si se trata de tracción como si es compresión .

[1] Una estructura podría estar definida con tensión σ constante, menor que la resistencia del material, $\sigma < f$, por ejemplo, por necesidades de limitación de la deformación,..., pero en tal caso no la consideramos estructura **estricta**.

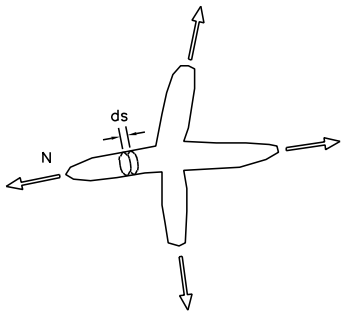


Figura 7.1: Cantidad de estructura

7.1.2. Relación con otras magnitudes

Cantidad de estructura y volumen

La cantidad de estructura es una medida del volumen de la estructura que no se halla asociada al material utilizado, siendo proporcional al volumen en estructuras estrictas.

En efecto, sea un material de comportamiento simétrico en tracción y compresión cuya tensión de trabajo sea σ. Para una estructura estricta, en toda sección el área será

$$A = \frac{|N|}{\sigma}$$

y el elemento de volumen

$$dV = A\,ds,$$

de modo que el volumen de la estructura será

$$V = \int A\,ds = \int \frac{|N|}{\sigma}\,ds = \frac{W}{\sigma} \tag{7.2}$$

tanto si admitimos σ constante, como si consideramos en la expresión su valor medio ponderado.

Si se trata de una estructura de barras la citada magnitud es la suma para todas las barras del producto esfuerzo por longitud de la barra. Se trata de una magnitud con dimensiones de trabajo, y es una mejor medida teórica de la "cantidad" de estructura que se invierte en resolver un problema dado que el volumen, en la medida en que no depende del material empleado en la estructura.

De este modo en una Estructura Estricta **el volumen de la estructura es directamente la "cantidad de estructura" dividida por la Tensión de servicio**.

Si no es posible asegurar idéntica tensión en todos los puntos, el volumen será mayor que dicho cociente, pero estará gobernado por la magnitud W.

$$V = \int \frac{dW}{\sigma}, \quad \sigma \text{ variable.} \tag{7.3}$$

Veremos más adelante que en el caso de una estructura formada, bien por materiales diferentes en compresión o tracción, bien por un material de comportamiento no simétrico en ambos estados, siendo σ_t y σ_c las tensiones en servicio

en tracción y compresión, el Volumen de la Estructura V es una función lineal creciente de W. En todo caso, basta aquí realizar las sumas por separado para tracción y compresión, y evaluar independientemente los volúmenes y costos de las dos partes de la estructura.

Una expresión muy próxima a la anterior, y empleada a menudo es, como señala Vázquez en [Vázquez, 1994], la de **volumen estructural** $\mathcal{W}$. La interpretación preferible para dicho término es la que la relaciona directamente con el producto del volumen de la estructura con la tensión de trabajo del material: $\mathcal{W} = \sigma V = \sigma \int \frac{dW}{\sigma} \geq W$. La cantidad de estructura es, por tanto, una cota inferior al volumen estructural que, como aquella, no depende del material empleado, sino sólo de la ley que en cada punto asocia la tensión efectivamente existente con la tensión de trabajo del material. El cociente entre ambas magnitudes $W/\mathcal{W}$ es una medida de la eficiencia en el aprovechamiento de la resistencia del material empleado. Dicha medida, sin embargo es poco o nada representativa de las cualidades de eficiencia global de la solución.

Cantidad de estructura y peso propio

Si denominamos ρ al peso específico del material empleado, podemos obtener el peso de la estructura a partir del volumen:

$$P = \rho V = \rho \frac{\mathcal{W}}{\sigma}$$

expresión que es más usual escribir en la forma

$$P = \frac{\mathcal{W}}{\sigma/\rho} \tag{7.4}$$

pues efectivamente, la magnitud σ/ρ es una cualidad del material crucial en la solución de los problemas de peso propio, que tiene unidades de longitud. Esta última cualidad la hace muy apropiada para caracterizar los materiales, como veremos más adelante.

Minimizar W significa minimizar el consumo de material, lo que no significa necesariamente minimizar el coste, ya que no existe proporcionalidad directa entre consumo de material y coste, bien por la complejidad de la estructura, bien porque tracciones y compresiones puedan realizarse con materiales de costes diferentes y de distinta forma de utilización.

7.1.3. Cantidad de estructura traccionada y comprimida

Pueden llamarse N^+ y N^- a las solicitaciones de tracción y compresión respectivamente —en valores absolutos— de modo que la cantidad de estructura total incluirá ambas:

$$W^+ = \int |N^+|\, ds, \quad W^- = \int |N^-|\, ds,$$
$$W = \int |N|\, ds = \int_+ N^+ ds + \int_- |N^-|, ds = W^+ + W^-$$

La distinción es importante no sólo por el evidente distinto comportamiento de ambas partes de la estructura, que permite empleo de materiales diferentes,

o que implica consideraciones particulares para el caso de las compresiones en cuestiones de estabilidad: vamos a ver que la relación entre ambas magnitudes permite realizar afirmaciones muy generales sobre las estructuras que compiten para resolver el mismo problema.

Número de Maxwell

Denominamos **número de Maxwell** a la integral

$$M = \int N\, ds.$$

Obsérvese que ahora usamos el valor del esfuerzo con su signo (tracciones positivas y compresiones negativas). Si desglosamos la integral entre las dos partes tendremos

$$M \int N\, ds = \int N^+\, ds + \int N^-\, ds = \int N^+\, ds - \int |N^-|\, ds$$
$$M = W^+ - W^-$$

El número de Maxwell es, por tanto, la diferencia entre la cantidad de estructura traccionada y la cantidad de estructura comprimida.

7.1.4. Cantidad de estructura horizontal y vertical

Si consideramos la carga gravitatoria como una de las de máxima relevancia en buena parte de los problemas estructurales, tiene sentido considerar una nueva división en la cantidad de estructura, a saber, la que puede contabilizarse en traslados horizontales de carga, y la contenida en traslados verticales de carga. Suponemos estructuras planas o tridimensionales, realizadas mediante barras sometidas a esfuerzos axiles, en las que las barras pueden tener orientaciones variadas en el espacio. La cantidad de estructura puede medirse con

$$W = \int |N|\, dl = \int |\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{dl}| = \int (|N_x\, dx + N_y\, dy + N_z\, dz|)$$
$$W = \int |N_x|\, dx + \int |N_y|\, dy + \int |N_z|\, dz.$$

lo que es admisible dado que los esfuerzos N y las longitudes dl de las barras están alineadas, por lo que los signos de sus tres componentes son simultáneamente iguales si la barra está traccionada, o simultáneamente opuestos si está comprimida.

Llamamos cantidad de estructura vertical $W^{\parallel}$ a la parte vertical de dicha expresión

$$W^{\parallel} = \int |N_z|\, dz$$

y cantidad de estructura horizontal $W^{=}$ a la parte horizontal de la misma

$$W^{=} = \int |N_x|\, dx + \int |N_y|\, dy$$

Si la estructura es de barras de dimensión finita, las expresiones serán sumas:

$$W^{\parallel} = \sum |N_{iz}| l_{iz}$$
$$W^{=} = \sum |N_{ix}| l_{ix} + \sum |N_{iy}| l_{iy}$$

7.2. Teoremas fundamentales

Los siguientes teoremas, que se basan en las magnitudes definidas en la sección anterior, permiten una aproximación muy potente a la idoneidad de una estructura, definida en términos de menor consumo y de mayor rigidez estructural.

El primero de ellos fué enunciado en [Maxwell, 1890] por primera vez, aunque en términos relativamente oscuros.

7.2.1. Constancia del número de Maxwell

Teorema 5 (Teorema de Maxwell) *Para toda Estructura de Maxwell que resuelve un mismo problema de Maxwell, el número de Maxwell $M = \int N\, ds$ es función de las fuerzas aplicadas y de sus puntos de aplicación, e independiente de la forma de la estructura, siendo el mismo para todas ellas.*

Nótese que la afirmación se hace para toda estructura de Maxwell, no necesariamente de dimensionado estricto, que resuelve idéntico problema.

Para demostrar dicho teorema basta aplicar el teorema de los trabajos virtuales a una de dichas estructuras.

Por este último, si sometemos a una estructura en equilibrio a un movimiento o deformación arbitrario, el trabajo total realizado por fuerzas externas e internas es nulo.

Supongamos pues una deformación consistente en expandir uniformemente la estructura en torno al origen de coordenadas que permanece fijo, ampliando las dimensiones lineales l en un factor $(1 + e)$. Denotaremos por $\boldsymbol{e}_i$ al vector desplazamiento de todo punto $\boldsymbol{i}$ en tales circunstancias. Tales vectores forman una radiación de centro en el origen y de magnitud proporcional a la distancia de cada punto al mismo.

En esta situación el trabajo realizado por las fuerzas exteriores será $\sum \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{e}_i$, suma de los productos escalares fuerza por desplazamiento. Si desglosamos en componentes:

$$\sum \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{e}_i = \sum F_{xi} X_i e + \sum F_{yi} Y_i e + \sum F_{zi} Z_i e$$

Por otro lado la deformación interior en cada componente de la estructura será e, constante en toda ella. El trabajo de deformación interno a la estructura será:

$$U = \int \sigma e\, dV = e \int \sigma\, dV = e \int N \frac{dV}{A} = e \int N\, ds$$

y por lo tanto si el trabajo total debe ser nulo resulta

$$M = \int N\, ds = \sum F_{xi} X_i + \sum F_{yi} Y_i + \sum F_{zi} Z_i. \tag{7.5}$$

Nótese que σ puede ser variable sin que ello afecte al razonamiento.

En las anteriores expresiones, suponiendo una estructura dada a la que se aplica la expansión uniforme e, es evidente observar que U, y por lo tanto $\sum \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{e}_i$ no dependen del sistema de ejes de referencia elegido. Como a su vez $\sum \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{e}_i$ no depende de la estructura elegida, resulta ser M independiente de ésta, por lo que es una constante del problema, que no depende de su solución. A la cantidad M la denominamos, como hemos visto, **número de Maxwell** del problema.

De dicho teorema se derivan importantes corolarios:

1. Una estructura de Maxwell que sea estricta, sólo traccionada o sólo extendida es ya una estructura mínima, y todas las diferentes estructuras que puedan proponerse en estas condiciones para el problema de Maxwell dado son equivalentes. En este caso el número de Maxwell coincide con la cantidad de estructura.

   Es fácil ver asimismo que, en estas condiciones, y si admitimos pequeños desplazamientos en las fuerzas para acomodarse a la deformación, todas las estructuras estrictas posibles tienen igual deformación, y por lo tanto no existen siquiera problemas de compatibilidad en soluciones hiperestáticas, en la medida en que sometiendo a todas las secciones a idéntica σ se asegura que estén sometidas a idéntica deformación ε, y por lo tanto todo el esquema estructural experimenta una expansión —contracción— uniforme —y por lo tanto compatible— igual para todos los esquemas.

   En tales casos sencillos, las soluciones son obvias:

   - Soluciones a la unión de dos puntos en el espacio como en la figura 7.2, donde representamos en grueso las barras comprimidas. Pueden obtenerse las solicitaciones por semejanza de triángulos o cortes, comprobándose que la segunda solución necesita más estructura que la primera: la diferencia es exactamente el doble de la estructura de tracción añadida:

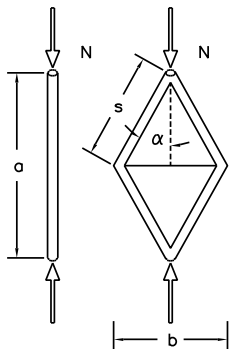
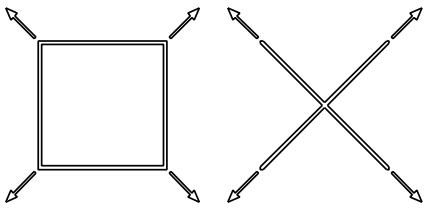


Figura 7.2: Soluciones alternativas para una fuerza axial

$$1: \quad W = \int |N|\, ds = Nh,$$

$$2: \quad \begin{cases} W^- = \frac{4N}{2\cos\alpha}\frac{h}{2\cos\alpha} = Nh + \frac{Na^2}{h}; \\ W^+ = \frac{Na^2}{h} \end{cases}$$

- - Soluciones estructurales a cuatro fuerzas iguales y opuestas dos a dos, con orígenes equidistantes de un punto central: figura 7.3 Ambas soluciones, con barras traccionadas, requieren igual cantidad de estructura:



1: $W = 4lN\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2: $W = 2Nl\sqrt{2}$

Figura 7.3: Soluciones equivalentes en tracción

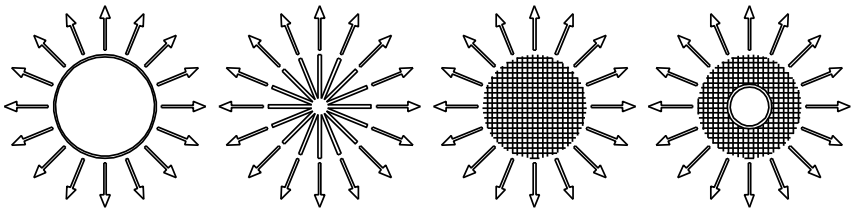


Figura 7.4: Soluciones equivalentes frente a cargas radiales

- - Soluciones estructurales a una fuerza uniforme constante con puntos de origen sobre una circunferencia de radio a: figura 7.4 Las tres soluciones, con anillo traccionado, mediante diámetros traccionados, o mediante malla traccionada precisan igual cantidad de estructura. Lo mismo vale para otras combinaciones posibles de dichos tipos de estructura, como se sugiere en la cuarta figura[2].

  En estructuras comprimidas, en la práctica, tendrá menos penalización la solución con menor número de barras o barras más cortas, como es el caso del anillo del ejemplo anterior. En las soluciones de la figura 7.3, por ejemplo, la estructura 2 será preferible si el movimiento perpendicular al plano del dibujo está impedido, y la 1 en caso contrario.

[2]Hay que hacer notar que la equivalencia estructural expresada en la figura 7.4 constituye una de las más poderosas reglas de transformación formal que pueda emplearse en la exploración de tipos estructurales, regla que emplearemos profusamente en la exploración de formas de cubiertas.

2. En un problema de Maxwell, la diferencia entre la cantidad de estructura utilizada en tracción y compresión permanece constante, por lo que reducir la parte de estructura que trabaja en compresión implica reducir simultáneamente la parte en tracción, y viceversa.

   En efecto, desglosando la cantidad de estructura W en dos partes, una W^+ en tracción y otra W^- en compresión resulta:

$$W = W^+ + W^-;$$
$$M = W^+ - W^- \quad \text{(constante)};$$

   Reducir uno de los términos en la segunda expresión exige reducir el primero al efecto de que se mantenga la diferencia. Por ello:

3. Si se minimiza una de las dos partes de compresión o de tracción de una estructura se minimiza la estructura.

   En los casos en que no puede resolverse el problema con sólo tracciones o compresiones, la búsqueda es más compleja, si bien en ella ayuda conocer que la diferencia entre parte traccionada y comprimida es constante. Más adelante veremos otras propiedades específicas de las estructuras mínimas que ayudan igualmente a su localización.

Podemos ver ahora que en el caso de una estructura dimensionada estrictamente y formada, bien por materiales diferentes en compresión o tracción, bien por un material de comportamiento no simétrico en ambos estados, siendo σ_t y σ_c las tensiones máximas admisibles en tracción y compresión en valores absolutos, el Volumen de la Estructura V es una sencilla función lineal de W, de modo que la estructura de mínimo volumen es también la de menor cantidad de estructura.

En efecto el volumen será

$$V = \int \frac{|N|}{\sigma}\, ds = \int \frac{dW}{\sigma}$$

y por lo tanto

$$V = \frac{1}{\sigma_t}\int_t dW + \frac{1}{\sigma_c}\int_c dW$$
$$V = \frac{W^+}{\sigma_t} + \frac{W^-}{\sigma_c}$$

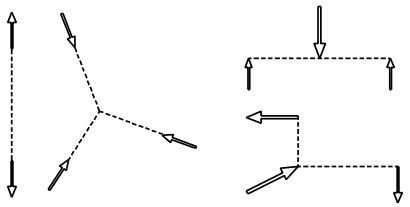


Figura 7.5: Problemas de Tracción–Compresión, y problemas de Flexión

Como

$$M = W^+ - W^-$$

resulta

$$(\sigma_t - \sigma_c)M = (\sigma_t - \sigma_c)W^+ - (\sigma_t - \sigma_c)W^-$$

y como

$$2\sigma_t\sigma_c V = 2\sigma_c W^+ + 2\sigma_t W^-$$

resulta, sumando ambas expresiones

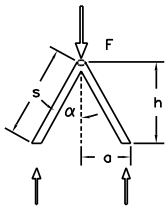
$$2\sigma_t\sigma_c V + (\sigma_t - \sigma_c)M = (\sigma_t + \sigma_c)(W^+ + W^-) = (\sigma_t + \sigma_c)W$$

y de este modo

$$V = \frac{\sigma_t + \sigma_c}{2\sigma_t\sigma_c}W - \frac{\sigma_t - \sigma_c}{2\sigma_t\sigma_c}M \tag{7.6}$$

Es fácil ver finalmente que, así como en problemas de sólo tracción o sólo compresión W y M coinciden, salvo signos, en los problemas de sólo flexión M es nulo (figura 7.5).

Cuando se comparen soluciones hay que cerciorarse que de hecho se esté resolviendo el mismo problema. El ejemplo de la figura 7.6 puede aclarar esta advertencia. En él aparentemente puede resolverse el problema con sólo compresiones con múltiples valores para $W = M$.



$$F_b = \frac{F}{2\cos\alpha}, \quad s = \frac{h}{\cos\alpha} \qquad \text{para cada barra}$$

$$W^- = \frac{Fh}{\cos^2\alpha} = Fa\left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a}\right) = Fa\left(k + \frac{1}{k}\right)$$

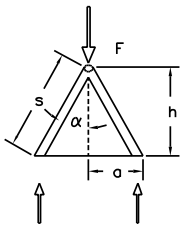
$$\frac{dW}{dk} = 0 \implies \frac{1}{k^2} = 1; \quad k = \pm 1$$

Figura 7.6: ¿Número de Maxwell variable?

Aparentemente, habiendo distintas soluciones que necesitan distinta cantidad de estructura, puede hallarse la óptima. Si llamamos $\lambda = h/2a$ podemos expresar $W = W(\lambda)$ y optimizar, obteniendo $\lambda\, dW/d\lambda = 0$. Las soluciones son $0,5$ (arco) y $-0,5$ (catenaria) para $W_{\text{mínimo}} = 2Fa$. Sin embargo, en la evaluación hemos olvidado considerar el empuje lateral, que supone diferente sistema de reacciones en cada uno de los problemas considerados.

La introducción de un tirante que asuma dicho empuje implica consumo de material, por lo que el problema ya no es igual al inicial. Los sistemas de fuerzas inherentes a cada caso son distintos en función del empuje: no estábamos resolviendo el mismo *Problema de Maxwell*.

Al agregar el tirante al arco estamos ante un sistema de fuerzas fijo, y a la cantidad de estructura comprimida W^- se añade la cantidad traccionada W^+. En este caso derivando nuevamente podemos obtener $W_{\text{mínimo}} = 2\sqrt{2}Fa$ para $\lambda = \pm\sqrt{2}/2$.



$$H = \frac{F}{2}\tan\alpha \implies W^+ = Fa\tan\alpha = Fa\frac{a}{h}$$
$$W = W^+ + W^- = Fa\left(2k + \frac{1}{k}\right)$$

Figura 7.7: Nuevamente parecería que M es no constante.

Aquí parecen contradecirse nuevamente los principios enunciados, ya que el valor mínimo para el tirante , y por lo tanto la cantidad mínima en tracción, no corresponde a la altura deducida, sino para $h = \infty$, en que su tracción se haría nula. En este caso la longitud infinita de los elementos en compresión haría infinito su consumo. La contradicción surge debido a que, aunque las fuerzas son ahora las mismas para cualquier solución, su posición en el espacio no lo es, de modo que, nuevamente, estamos resolviendo problemas distintos. Aplicar el teorema de Maxwell exige que el sistema de fuerzas exterior esté totalmente determinado en cuanto módulo, dirección, sentido y posición.

Si el enunciado del problema incluye la posición de las fuerzas en el espacio, cualquier solución del tipo de 2 en la figura 7.8 tiene mayor tracción —en el tirante vertical—, y por lo tanto mayor cantidad de material. Planteado el problema en esta forma, la diferencia entre estructura traccionada o comprimida de cualquier solución será la misma.

7.2.2. Caracterización de soluciones óptimas

Aun cuando no hay modo general de obtención de soluciones óptimas para un problema de Maxwell dado, puede sin embargo verificarse si una solución dada es o no óptima, a partir de las afirmaciones del siguiente teorema:

Teorema 6 (Teorema de Michell) *Una estructura estricta alcanza el límite de economía —es estructura mínima— si el espacio en el que está situada puede ser sometido a una deformación —virtual— tal que los alargamientos o acortamientos unitarios se incrementan igualmente en todas las piezas —con el mismo valor, y en el signo de la deformación original—, y en valor no menor que el cambio unitario de longitud de cualquier elemento del espacio considerado.*

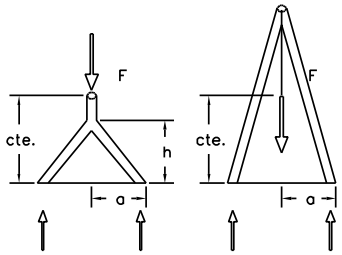


Figura 7.8: Soluciones alternativas para igual problema de Maxwell.

Si el espacio considerado se extiende al infinito en todas las direcciones, el volumen de tal estructura es mínimo con relación a todos los posibles diseños, y en caso contrario mínimo en relación a los diseños que pueden considerarse incluidos en el mismo contorno finito.

El teorema, enunciado en [Michell, 1904], aun de difícil comprensión, se torna inteligible cuando se recorre el proceso de demostración, que es como sigue:

Considérese el espacio delimitado por un contorno dado encerrando todas las estructuras estrictas interiores a ese contorno que puedan concebirse para un cierto problema de Maxwell. Considérese dicho espacio sometido a una deformación virtual arbitraria, y establecida de forma tal que el valor absoluto de las deformaciones principales virtuales en todo punto del espacio sean menores que un cierto valor e dado. —En toda dirección del espacio el valor absoluto del alargamiento o acortamiento unitario μ es: $|\mu| \leq e$—. Por el principio de los trabajos virtuales, la variación en la energía de deformación de cada estructura en dicha deformación es igual al trabajo realizado por las fuerzas exteriores δU y por lo tanto será igual para todas ellas. Podemos escribir, pues

$$\delta U = \int \mu\sigma \, dV$$

magnitud igual para todas las estructuras consideradas.

$$\delta U = \int \mu\sigma A \, ds \leq \int |\mu||N| \, ds \leq \int e|N| \, ds,$$

y de este modo para todas ellas será

$$\delta U \leq e \int dW \tag{7.7}$$

De este modo los valores posibles para la cantidad de estructura W, incluyendo el correspondiente a la estructura mínima contenida en el recinto quedan acotados inferiormente por $\delta U/e$.

Ahora bien, si es posible encontrar una estructura cuyas deformaciones se incrementen en la deformación virtual establecida, 1: con el mismo valor ($\mu = e$) en todos los puntos, y 2: en el mismo sentido que las deformaciones originales, resultará que en el desarrollo anterior los signos $\leq$ se modifican a $=$, por lo que

dicha estructura tiene como cantidad de estructura la citada cota inferior, y es por lo tanto la estructura mínima.

De este modo la caracterización de una estructura como mínima mediante el Teorema de Michell exige que una estructura dada pueda confrontarse con una deformación test cuyas direcciones principales coincidan en todas partes con las deformaciones de las barras y con el signo de los esfuerzos de éstas, y cuyos valores principales sean constantes en todo el ámbito de la estructura, —en valor absoluto, aunque no necesariamente en orientación—, y mayores o iguales a las deformaciones pricipales del resto del espacio considerado.

De la clase de estructuras que pueden ser sometidas con éxito a una deformación test del tipo citado, Michell presenta dos subclases:

1. Las estructuras sometidas a esfuerzos de igual signo en todos sus barras — Para éstas la deformación test es una contracción o una dilatación uniforme del espacio— Tales estructuras se caracterizan ya como mínimas con el teorema de Maxwell.

2. Las estructuras formadas por barras en direcciones ortogonales antes y después de la deformación, para las que la deformación test es igual en valor, y de igual u opuesto signo en tales direcciones. Veremos más adelante alguno de los casos más importantes, para problemas de flexión, de los que en la figura se incluyen algunos de los casos óptimos más típicos.

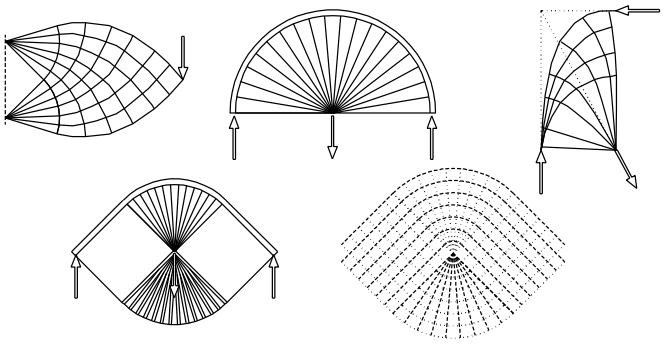


Figura 7.9: Trazados óptimos según el criterio de Michell

El teorema de Michell tiene gran importancia, puesto que permite establecer un método de prueba para garantizar si una estructura es o no óptima para un problema dado. Pese a que no ofrece una guía definitiva en la búsqueda de soluciones óptimas, tiene, sin embargo, un gran valor heurístico en la misma. En efecto, puesto que en la solución óptima —y estricta—, la deformación real y la deformación test coinciden —salvo un factor de escala—, los óptimos corresponderán a situaciones en las que las direcciones de las barras coincidan con aquellas en que se producen las máximas deformaciones —considerando la deformación de todo el espacio que acompaña a la estructura—. De este modo existe una guía para la modificación en posición de las barras. Por otro lado, dado que en estructuras planas el estado de deformación —test o no— del espacio considerado es en todos sus puntos un estado plano, es inmediato comprobar que las direcciones de máxima tracción y máxima compresión corresponderán

a las direcciones principales de dicho estado en el punto considerado, y siendo éstas ortogonales entre sí se deduce que la situación óptima de encuentro entre barras sometidas a esfuerzo de distinto signo es la que se produce con ángulos de 90°. Esto implica que en todos los puntos de aplicación de cargas la solución óptima contendrá, bien una barra en la dirección de la carga, bien dos barras que, o bien contienen la dirección de la carga en el ángulo que forman entre sí —y en este caso la deformación test local debe ser uniforme en todas direcciones, de tracción o compresión— o si no es así deberán encontrarse en dicho punto de aplicación formando un ángulo recto, y trabajando con signos opuestos.

7.2.3. Relación entre la eficiencia estructural y la rigidez

En la medida en que los requisitos estructurales incluyen no sólo las condiciones de resistencia, que fueron las consideradas al revisar las razones en favor de la definición de cantidad de estructura, parece pertinente analizar ahora la relación que existe entre esta magnitud y la rigidez de la estructura, lo que permite apuntalar definitivamente la elección de dicha magnitud. El siguiente teorema aporta las razones definitivas[3]

Teorema 7 (Teorema de la máxima rigidez) *De entre todas las estructuras estrictas que resuelven el mismo problema de Maxwell, todas aquellas que tienen igual cantidad de estructura tienen igual deformación; la deformación aumenta con la cantidad de estructura del esquema elegido, y, por lo tanto, la estructura mínima —la de menor cantidad de estructura— es también la más rígida.*

La propiedad de la máxima rigidez de las estructuras mínimas parece haber sido señalada por [Chan, 1960], según referencia incluida en [Parkes, 1965], en publicación casi simultánea en el tiempo con [Cox, 1965], por lo que parece suficientemente conocida en dichos años. Las dos últimas referencias la incluyen en la discusión del teorema de Michell, aunque éste no la incluye en su publicación de 1904. Aparece asimismo en la tesis doctoral [de Miguel, 1974].

Para demostrar el Teorema hemos de definir previamente cómo describir de una forma abstracta y uniforme la deformación para esquemas estructurales que pueden ser muy diferentes. Se trata de usar una norma coherente del desplazamiento, un escalar que permita la comparación y que sea acorde a la "deformabilidad" que se asigna más o menos intuitivamente a cada estructura.

Es usual, en esquemas sencillos como los de la figura 7.10 —pórtico de una altura, viga de un vano— usar como medida de la deformación de la estructura un desplazamiento de ésta, y en particular el desplazamiento en la posición y dirección de la carga principal —"bajo" la carga principal— , y cuando no es ése el caso, un valor que es proporcional a éste para tipos comparables de estructuras.

Para problemas de Maxwell, los únicos parámetros fijos son la posición y magnitud de las cargas, por lo que es apropiado usar los desplazamientos "bajo" éstas, debiendo ser combinados en forma apropiada todos ellos en un único escalar. Una forma de hacerlo es sumarlos escalarmente asignando pesos a cada uno, bien iguales, bien que denoten una contribución diferente a la suma según

[3] Ver [Cervera, 1989]

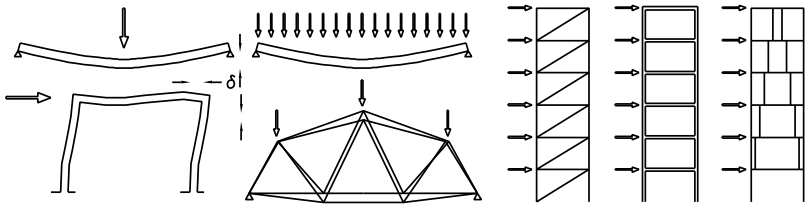


Figura 7.10: Medidas de la deformación

su importancia respectiva. Se trataría, pues de una medida del tipo:

$$\delta_e = \sum \alpha_i \delta_i$$

siendo δ_e la medida de la deformación de la estructura, α_i el peso asignado a cada desplazamiento y δ_i cada uno de éstos. La forma más evidente de asociar un peso a cada desplazamiento es hacerlo mediante la magnitud de la carga aplicada en el punto correspondiente: Se reproduce así la idea intuitiva de que las cargas mayores son las de mayor importancia en la descripción del comportamiento global de la estructura. De este modo

$$\delta_e = \sum P_i \delta_i$$

Ahora bien es fácil ver que si se consideran como desplazamientos los situados en la posición y dirección de las cargas, tal magnitud no es otra que la pérdida de energía potencial de las fuerzas que constituyen el problema debido a la deformación de la estructura[4]. El escalar corresponde, pues, a un concepto claro, adecuado en los casos sencillos citados más arriba, y utilizable en forma general.

Adoptando pues como deformación de la estructura el valor de la pérdida de energía potencial de las fuerzas que sobre ella actúan, bastará medir dicho valor y compararlo en estructuras diferentes.

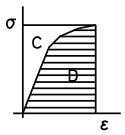
Dicho valor, considerado desde el punto de vista de la deformación de la estructura no es más que la integral extendida a todo su volumen del producto Tensión–Deformación —suma de la energía de deformación y de la llamada energía complementaria—. Debe añadirse que, en estructuras elásticas, dicha magnitud es exactamente el doble de la energía de deformación almacenada en la estructura.

$$\delta_e = U = \int \sigma\varepsilon \, dV = \int \sigma\varepsilon \frac{dW}{\sigma} = \int \varepsilon \, dW \tag{7.8}$$

Tratándose de comparar diseños estrictos de idéntico material, como los valores de tensión y deformación son constantes e iguales para todos los diseños considerados, y eso en todas y cada una de sus secciones, resulta de la expresión anterior que la deformación de la estructura es proporcional, en estructuras estrictas, a la cantidad de estructura de éstas.

De ello se deduce que estructuras de igual cantidad de estructura son igualmente deformables, y que la estructura mínima —de menor cantidad de estructura— es asimismo la más rígida.

[4] *Compliance* en la literatura inglesa



D: Energía de deformación

C: "Energía Complementaria"

Figura 7.11: Energía de deformación y complementaria

Si se usan materiales o tensiones diferentes en tracción y compresión, el proceso es algo más complicado, pero se llega a un resultado similar: la deformación es función lineal de la cantidad de estructura de las estructuras consideradas, de modo que la óptima es la más rígida.

$$U_p = \int_t \sigma_t \varepsilon_t \, dV + \int_c \sigma_c \varepsilon_c \, dV = \varepsilon_t W^+ + \varepsilon_c W^-;$$
$$2U_p = 2\varepsilon_t W^+ + 2\varepsilon_c W^-;$$
$$(\varepsilon_t - \varepsilon_c)M = (\varepsilon_t - \varepsilon_c)W^+ - (\varepsilon_t - \varepsilon_c)W^-;$$
$$2U_p - (\varepsilon_t - \varepsilon_c)M = (\varepsilon_t + \varepsilon_c)(W^+ + W^-) = (\varepsilon_t + \varepsilon_c)W$$

$$U_p = \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_c}{2} W + \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_c}{2} M \tag{7.9}$$

El teorema que se acaba de demostrar permite interpretar la ligazón entre menor coste y menor deformación que resulta en soluciones alternativas en numerosos casos conocidos: vigas continuas frente a vigas apoyadas, cerchas trianguladas o arcos de canto óptimo frente a las soluciones de menores cantos, empleo de ángulos óptimos (90° como sugiere el teorema de Michell) en triangulaciones, etc...

Puede verse que las magnitudes W y M —cantidad de estructura y número de Maxwell— revisten una importancia crucial en la descripción de las cualidades de una estructura, gobernando tanto su volumen como su deformación. Cabe añadir además que W es mejor medida de la inversión en estructura requerida por una forma dada que V en la medida en que no depende del material elegido para materializar dicha forma, siendo sus magnitudes exclusivamente fuerzas y recorridos. Esto permite analizar soluciones en forma más genérica que si consideramos su materialización.

Del teorema anterior pueden deducirse importantes corolarios:

1. Para minimizar la estructura de un problema de Maxwell bastará obtener el esquema estructural que minimice la deformación de la misma —siempre que se utilice el material en su máximo aprovechamiento—. Por el contrario, disminuir la rigidez implícita a un esquema estructural supone aumentar su cantidad de estructura, y, en la medida en que el coste depende de aquélla, aumentar el coste final de la estructura[5].

[5] Un ejemplo manifiesto de esta afirmación es el Puente del Alamillo en Sevilla, cuya escasísi-

2. Si para un tipo estructural dado, el límite —en un proceso de modificación de su geometría— en que tal tipo deja de ser utilizable por razones económicas —en competencia con otros tipos— corresponde a un esquema en el que se cumplen los requisitos de deformación sin necesidad de disminuir las tensiones en sus secciones, dichos requisitos de deformación se cumplen igualmente en todos los esquemas utilizables de dicho tipo, pues corresponderán a estructuras de menor coste, por tanto, de menor cantidad de estructura, y por ende de menor deformación. —Un ejemplo inmediato de este corolario es la inutilidad de comprobar las flechas en arcos cuando se emplean en competencia contra vigas, pues su ámbito de aplicación corresponde a esbelteces para las que las deformaciones son —en aplicaciones usuales— totalmente compatibles con los usos.—

3. Si una estructura estricta para un problema dado presenta una deformación dada δ —con un consumo en volumen de material de V—, y otra estructura estricta para el mismo problema presenta una deformación $\alpha\delta$, $(\alpha > 1)$, lograr con el segundo esquema la misma deformación que la correspondiente a la primera supone un consumo de material —medido en volumen— de $\alpha^2 V$. Pues la cantidad de estructura del segundo esquema es $W_2 = \alpha W_1$, —por hallarse los volúmenes en igual relación para iguales tensiones de trabajo—. Y puesto que el volumen es función directa de la cantidad de estructura y función inversa de la tensión de trabajo del material, disminuir α veces la tensión de trabajo —al objeto de disminuir la deformación en la misma medida— supone aumentar nuevamente α veces el volumen.

Una interesante aplicación de este teorema es la demostración de que todas los trazados de vigas apoyadas directamente en un único contorno circular, a igualdad de canto, son intercambiables[6], como se deduce de la figura, y como se verá en el apartado 8.5.2. El mismo razonamiento permite estimar la ventaja obtenida al apoyar en los cuatro lados de un contorno cuadrado, frente al apoyo en sólo dos lados, comparando las medidas del volumen encerrado entre la deformada y la horizontal inicial.

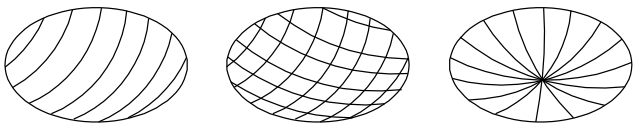


Figura 7.12: Alternativas con apoyo en contorno circular

7.2.4. Cambios de canto y estructuras afines. Esbeltez óptima

En la exploración de alternativas formales a problemas estructurales es sabido que una de las decisiones fundamentales está en la determinación del *canto*

ma rigidez —una viga colgada de una ménsula— es la base de todos sus defectos estructurales, pese a la indudable belleza que posee como objeto cuando se le ve a distancia.

[6]Esto amplía el campo de aplicación de las transformaciones formales legítimas a que aludíamos al hablar de las aplicaciones del teorema de Maxwell.

de la estructura. Vamos por ello a analizar las transformaciones de forma más sencillas apropiadas a dicho objetivo, a saber, las transformaciones afines, y analizar tanto las condiciones de equilibrio como de consumo en cantidad de estructura derivadas de tales transformaciones. No vamos a hacerlo de forma sistemática y total, dado que la transformación que tratamos de entender es en particular la derivada del cambio de canto de la estructura manteniendo los demás parámetros de forma inmutables. Respecto del problema general, baste aquí recordar que cualquier transformación afín que modifique simultáneamente fuerzas (acciones, esfuerzos axiales y reacciones) y longitudes aplicada a una estructura en equilibrio producirá una nueva estructura que estará igualmente en equilibrio.

Consideramos la transformación de las componentes verticales de fuerzas y longitudes al afectarlas por un factor α: si el factor es menor que 1 se tratará de una reducción de canto, y si es mayor, de un aumento de canto. Para dicha clase de transformaciones podemos establecer el siguiente:

Teorema 8 (Teorema del canto óptimo) *Si a partir de una estructura sometida a cargas —y reacciones— sólo verticales consideramos todas las formas que pueden obtenerse manteniendo la topología original y el punto de aplicación de las cargas relativo a dicha topología, y que alteren la geometría mediante transformaciones afines que sólo afecten al canto de la estructura, la estructura óptima entre éstas será la que cumpla la condición de que las cantidades de estructura vertical y horizontal se igualan.*

Dicho teorema asegura que una condición necesaria, aunque no suficiente, para el óptimo en las estructuras que resuelven problemas en los que las cargas se sitúan y son perpendiculares a un mismo plano es el que tengan igual cantidad de estructura vertical —ortogonal a dicho plano— que horizontal —paralela al plano— pues en caso contrario podría establecerse una transformación de canto en el sentido de igualarlas que reduciría la cantidad de estructura en virtud del teorema. O lo que es lo mismo, toda estructura óptima para esos problemas tiene igual cantidad de estructura vertical que horizontal, aunque no toda estructura con dicha cualidad es óptima —sólo es la mejor de entre las que se obtienen con cambios afines en el canto—.

Para demostrar el teorema escribimos las ecuaciones de equilibrio considerando las fuerzas que actúan sobre cualquier región de la estructura, incluyendo las cargas P y las componentes ejercidas por los esfuerzos N sobre los cortes que aislan dicha región. Las componentes horizontales de fuerzas y dimensiones se mantienen sin alteración. El equilibrio de fuerzas horizontales de la estructura original se mantiene pues en la transformada. Las componentes o distancias horizontales no cambian, por lo que los equilibrios de momentos respecto a un eje vertical se mantienen igualmente. Las ecuaciones siguientes valen por tanto igualmente para el equilibrio original, y para el transformado:

$$\sum P_{ix} + \sum N_{ix} = 0$$
$$\sum P_{iy} + \sum N_{iy} = 0$$
$$\sum y_i P_{ix} - \sum x_i P_{iy} + \sum y_i N_{ix} - \sum x_i N_{iy} = 0$$

En el caso de las fuerzas verticales totales que actúan, incluyendo las componentes verticales de los esfuerzos ejercidos en los cortes realizados, así como en

el de los momentos correspondientes a equilibrios respecto de los ejes horizontales OX, OY, se alteran los equilibrios iniciales, con lo que las ecuaciones que representan tanto el equilibrio original como los nuevos equilibrios resultantes del cambio afín son:

$$\sum \alpha P_{iz} + \sum \alpha N_{jz} = 0$$
$$\sum \alpha z_i P_{ix} - \sum x_i \alpha P_{iz} + \sum \alpha z_i N_{ix} - \sum x_i \alpha N_{iz} = 0$$
$$\sum y_i \alpha P_{iz} - \sum \alpha z_i P_{iy} + \sum y_i \alpha N_{iz} - \sum \alpha z_i N_{iy} = 0$$

en las que α representa el factor de cambio de canto adoptado por lo que, para el valor 1 representa la estructura original. Ahora bien, en este cambio se ha alterado el valor de las cargas, al cambiar sus componentes verticales, por lo que la nueva estructura no resuelve el mismo problema que la anterior.

Debemos remediar la situación volviendo a restaurar a su valor inicial a las componentes verticales de las cargas, que ahora son αP_{iz}, para lo que bastaría dividirlas por α. Sin embargo esto alteraría el equilibrio de fuerzas verticales, a la vez que los equilibrios de momentos respecto de los ejes horizontales, por lo que la alteración requiere ajustes adicionales.

Para mantener el equilibrio de fuerzas verticales se requerirá que las componentes verticales de los esfuerzos se alteren en igual modo, restaurándolas a su valor original:

$$\sum \frac{\alpha P_{iz}}{\alpha} + \sum \frac{\alpha N_{jz}}{\alpha} = 0$$

Esto exige además, para mantener la alineación de los esfuerzos con las barras, que las componentes horizontales de tales esfuerzos se alteren en igual medida, al igual que las componentes horizontales de las cargas y las reacciones. De modo que la alteración de las dimensiones verticales al multiplicarlas por un factor α sin cambio en las componentes verticales de las fuerzas implica, para que se mantenga el equilibrio, un cambio inverso en las componentes horizontales de fuerzas y esfuerzos (que se multiplicarán por $\frac{1}{\alpha}$). En estas condiciones las ecuaciones de equilibrio vuelven a cumplirse, como comprobamos a continuación en el equilibrio de fuerzas:

$$\sum \frac{P_{ix}}{\alpha} + \sum \frac{N_{ix}}{\alpha} = 0$$
$$\sum \frac{P_{iy}}{\alpha} + \sum \frac{N_{iy}}{\alpha} = 0$$
$$\sum P_{iz} + \sum N_{iz} = 0$$

y de momentos:

$$\sum y_i P_{iz} - \sum \alpha z_i \frac{P_{iy}}{\alpha} + \sum y_i N_{iz} - \sum \alpha z_i \frac{N_{iy}}{\alpha} = 0$$
$$\sum \alpha z_i \frac{P_{ix}}{\alpha} - \sum x_i P_{iz} + \sum \alpha z_i \frac{N_{ix}}{\alpha} - \sum x_i N_{iz} = 0$$
$$\sum y_i \frac{P_{ix}}{\alpha} - \sum x_i \frac{P_{iy}}{\alpha} + \sum y_i \frac{N_{ix}}{\alpha} - \sum x_i \frac{N_{iy}}{\alpha} = 0$$

Por tanto una reducción de canto implica un aumento de las fuerzas y esfuerzos horizontales en un factor inverso para que se mantenga el equilibrio con

las cargas verticales del problema inicial. Si consideramos sólo cargas gravitatorias —verticales— el ajuste de esfuerzos —y de reacciones en caso de tener componentes horizontales, como en el caso de los empujes de arcos— supondrá una alteración en la cantidad de estructura que ahora podemos analizar. Las cantidades de estructura iniciales, horizontal y vertical se alterarán de forma fácilmente predecible a partir de los valores originales:

$$W_\alpha^{\|} = \sum |N_{iz}|\alpha l_{iz} = \alpha W^{\|}$$
$$W_\alpha^{=} = \sum |\frac{1}{\alpha} N_{ix}| l_{ix} + \sum |\frac{1}{\alpha} N_{iy}| l_{iy} = \frac{1}{\alpha} W^{=}$$

Se observa que ambas componentes se modifican de forma inversa, mientras una crece la otra decrece, de modo que podemos afirmar que su producto se mantiene constante. Dado que la cantidad de estructura total es la suma de ambas partes, el óptimo se obtendrá cuando éstas sumen el valor mínimo. Ahora bien, el mínimo de la suma de dos cantidades cuyo producto es constante se produce cuando ambas son iguales, como puede comprenderse si se considera la suma como el semiperímetro de un rectángulo y el producto como el área del mismo. A igualdad de área el perímetro mínimo es el del cuadrado[7].

De modo que los valores óptimos de la cantidad de estructura vertical y horizontal son la media geométrica de las originales

$$W_o^{\|} = W_o^{=} = \sqrt{W^{\|} W^{=}}$$

El correspondiente factor de alteración en las dimensiones verticales resulta ser

[7] Puede establecerse algebraicamente la condición de muchos modos. Como ilustración de algunos de los métodos citados en 6.3.2 el problema de obtener a, b que hacen

$$\text{mín}(f = a + b) \quad \text{con } ab = k \quad \text{(constante)}$$

puede reescribirse como obtener las a, b que hacen $\text{mín}\,\phi$ siendo ϕ la función obtenida empleando el multiplicador de lagrange λ para la ligadura establecida:

$$\phi = f + \lambda(ab - k) = a + b - \lambda(ab - k)$$
$$\text{mín}(\phi) = \text{mín}(a + b - \lambda(ab - k)) \equiv \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

que corresponde al sistema de ecuaciones

$$1 - \lambda b = 0$$
$$1 - \lambda a = 0$$
$$ab - k = 0$$

de las que se deduce

$$b = a = \frac{1}{\lambda}$$
$$\frac{1}{\lambda^2} = k$$
$$b = a = \sqrt{k}.$$

En particular la constante puede obtenerse a partir de un caso conocido cualquiera con lo que

$$b = a = \sqrt{a_0 b_0}$$

igual al cociente entre la cantidad de estructura vertical óptima y la original

$$\alpha_o = \frac{W_o^{\|}}{W^{\|}}$$

El canto óptimo de la estructura se alterará en proporción a dicho valor, y por ende la esbeltez óptima, que es igual al cociente entre el tamaño (invariable) y el canto óptimo, resultará de multiplicar la esbeltez original por el inverso de dicho valor, resultando

$$\lambda_o = \lambda \frac{W^{\|}}{\sqrt{W^{\|} W^{=}}} = \lambda \frac{\sqrt{W^{\|} W^{=}}}{W^{=}}$$

Hay que hacer notar aquí que la condición geométrica empleada para la transformación se cumple en piezas trianguladas a costa de un cambio en los ángulos de la triangulación. Por la misma razón, las transformaciones de canto de piezas de alma llena no pueden ser consideradas en rigor incluidas entre éstas, dado que los cambios de canto no alteran la *optimidad* en los ángulos implícitos en el material del alma, que sigue trabajando como dos familias traccionada y comprimida a 45°.

Pero además puede asegurarse que en la transformación planteada se mantienen las deformaciones unitarias de las barras, de modo que el terorema es aplicable a estructuras hiperestáticas en las que se cambien las secciones proporcionalmente al cambio en esfuerzo aparecido. Pues efectivamente si con el cambio de canto se mantiene la deformación unitaria preexistente, los desplazamientos verticales crecen con el aumento de canto, manteniéndose idénticos los horizontales, con lo que la transformación afín es aplicable tanto a la estructura original como a la deformada, lo que asegura la compatibilidad. Puesto que hemos demostrado la existencia del equilibrio, sólo queda asegurar que deformaciones y esfuerzos respetan las relaciones de rigidez, lo que sólo exige usar el material en la estructura transformada con idéntico nivel de tensión al que tenía en las barras originales, y modificar las secciones en igual medida que los esfuerzos.

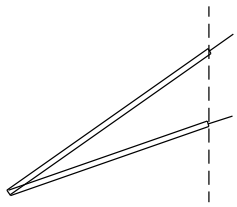


Figura 7.13: Deformación de barra y transformación afín

Se deduce una interesante consecuencia de la precedente propiedad al analizar el problema de los arcos con péndolas, que estudiaremos con mayor detalle en el apartado 8.3.

Veremos en dicho problema, que consiste en un arco trazado según el antifunicular de las cargas que cuelgan de él mediante péndolas y con tirante entre los apoyos, que las soluciones óptimas se producen cuando la cantidad de estructura en péndolas —vertical traccionada— iguala la cantidad de estructura en

tirante —horizontal traccionada— y su suma iguala la cantidad de estructura del arco —que contiene componentes iguales en cantidad de estructura horizontal y vertical comprimidas—, pues efectivamente la condición de óptimo para cambios de canto queda establecida cuando las cantidades horizontal y vertical son iguales. Puesto que en este problema el número de Maxwell es nulo, deben ser también iguales las cantidades traccionada y comprimida.

En este caso, pues, la cantidad de estructura de la solución óptima para cambios de canto puede medirse por 4 veces la de cualquiera de dichas partes, que podemos emplear como unidad. Si por ejemplo elegimos la traccionada horizontal, el tirante, tendremos $1 = W^{+=}$

$$W^{+\|} = W^{+=} = W^{-\|} = W^{-=} = 1$$
$$W = W^{+} + W^{-} = W^{+\|} + W^{+=} + W^{-\|} + W^{-=} = 4$$
$$W^{\|} = W^{=} = 2$$

Vamos a acometer una nueva transformación de geometría en uno cualquiera de dichos arcos con péndolas y tirante horizontal. Supongamos que desdoblamos la estructura en dos partes idénticas de carga mitad en cada una de ellas mediante un corte plano vertical. Tendremos ahora ocho partes idénticas en la cantidad de estructura. Supongamos que invertimos una de las dos mitades: las péndolas y tirante en tracción se convertirán en dicha mitad en montantes y cordón comprimido, mientras que el arco comprimido pasa a ser un hilo traccionado. El canto total se duplica, por lo que la esbeltez total pasa a ser la mitad ($\lambda_t = \frac{\lambda}{2}$). Las aportaciones a las componentes horizontal y vertical de la estructura se mantienen en todas las piezas tras la inversión propuesta.

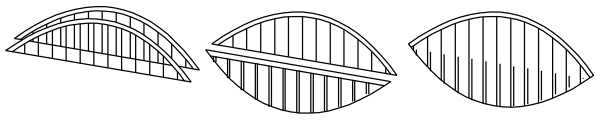


Figura 7.14: Mejora por simetría vertical

Ahora bien, si unimos ahora ambas mitades, resultará que las dos piezas horizontales —tirante del arco más cordón comprimido del hilo— dejan de ser necesarias, puesto que en cada apoyo el empuje del arco pasa a equilibrarse con la componente horizontal del anclaje del hilo. El tirante y cordón horizontal comprimido, al superponerse, se transforman en línea neutra sin esfuerzo. De este modo eliminamos la estructura que antes correspondía al tirante, es decir, la mitad de la (cantidad de) estructura horizontal, con lo que las cantidades de estructura en la estructura transformada pasan a ser $W_t^{=} = 1$, $W_t^{\|} = 2$, $W_t = 3$. Evidentemente no se trata de un óptimo —aunque hemos disminuido la cantidad original en un 25 %—. Por ello podemos determinar el cambio afín en el canto que optimiza la solución.

Se logrará el óptimo con

$$W_{to}^{\parallel} = W_{to}^{=} = \sqrt{W_t^{\parallel} W_t^{=}} = \sqrt{2}$$
$$W_{to} = 2\sqrt{2}$$
$$\alpha_o = \frac{W_{to}^{\parallel}}{W_t^{\parallel}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\lambda_o = \lambda_t \frac{W^{\parallel}}{\sqrt{W^{\parallel} W^{=}}} = \lambda_t \frac{2}{\sqrt{2}} = \lambda \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Es decir que, aumentando el canto original en $\sqrt{2}$ (reduciendo la esbeltez en $\sqrt{2}$) la cantidad de estructura total se reduce en el mismo factor. El hecho de tener curvatura en ambos cordones, es decir el hecho de poder apoyar carga transversal en ambos, mejora apreciablemente la eficiencia de la estructura. La simetría respecto de la horizontal aumenta la eficiencia de la forma inicial.

7.3. Expresión genérica para la cantidad de estructura

Los anteriores resultados permiten ahora explorar de forma genérica los parámetros fundamentales de los que depende la cantidad de estructura.

Para ello consideraremos estructuras dispuestas para sostener cargas orientadas en el mismo sentido —las gravitatorias usualmente— y consideraremos en dichas estructuras el valor acumulado de la resultante de las cargas acción, que llamaremos Q así como una dimensión representativa del problema que la estructura resuelve, que llamaremos l.

Dada la definición que hemos empleado para la cantidad de estructura, es evidente que si se alteran todas las cargas proporcionalmente, la cantidad de estructura se altera en igual medida: la cantidad de estructura es, por tanto, directamente proporcional a la carga total Q.

En segundo lugar podemos considerar que la carga se aplica en puntos discretos, y suponer modificaciones de dimensión en la estructura, manteniendo la proporcionalidad respecto de la forma original, sin que dichas modificaciones afectes a los valores de dichas cargas. En este caso todos los nudos mantendrán las fuerzas originales, por lo que las fuerzas en las barras se mantendrán. No así las longitudes, que cambiarán con la longitud empleada para definir el tamaño. En este caso queda de manifiesto que la cantidad de estructura resulta proporcional a dicho tamaño l.

Si se consideran juntamente las dos relaciones citadas, resultará que siendo la cantidad de estructura proporcional a carga total y tamaño, puede definirse mediante una expresión del tipo

$$W = \psi Q l$$

donde ψ es un factor de forma a determinar en cada caso, y donde la expresión recoge todos los casos de igual forma —tanto en la configuración de la estructura, excepto en su dimensión básica, como en la disposición de las cargas—. Pues efectivamente, dado que la cantidad de estructura tiene dimensiones de trabajo,

y dado que el producto de la carga por el tamaño aporta dichas dimensiones, debe resultar que el término ψ sea adimensional.

Si queremos avanzar algo más, supondremos ahora que, para una carga dada, y para un tamaño dado, realizamos alteraciones afines de canto, de las descritas en el anterior apartado. En este caso sabemos que existirá un canto óptimo para el cual las partes vertical y horizontal de la cantidad de estructura coinciden. Vamos a usar dicho caso como referencia. En el óptimo,

$$W_o = W_o^{=} + W_o^{\parallel} = \psi_o Ql \quad \text{con } W_o^{=} = W_o^{\parallel}.$$

y podemos establecer una relación entre el tamaño de la estructura l y su dimensión transversal o canto, que llamamos esbeltez λ que adopta el valor λ_o para dicho canto óptimo. Para situaciones con otras dimensiones resultará que la esbeltez variará con un cierto factor α —que por fijar ideas podemos imaginar mayor que la unidad con lo que la esbeltez aumenta con α—,

$$\lambda = \alpha\lambda_o$$

de modo que el canto varía con $\frac{1}{\alpha}$ y la cantidad de estructura variará al variar las componentes vertical y horizontal en la forma vista en el apartado anterior: la cantidad vertical variará —disminuirá— con $\frac{1}{\alpha}$ mientras que la horizontal lo hará —aumentará— con α. Así pues

$$W = W^{=} + W^{\parallel} = \alpha W_o^{=} + \frac{1}{\alpha} W_o^{\parallel}$$
$$W = W_o^{=}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$
$$W = W_o^{=}\left(\frac{\lambda}{\lambda_o} + \frac{\lambda_o}{\lambda}\right)$$
$$W = W_o^{=}\frac{\lambda}{\lambda_o}\left(1 + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}\right).$$

Como habíamos establecido el valor de la cantidad de estructura óptima $W_o^{=} = \frac{1}{2}W_o = \frac{1}{2}\psi_o Ql$ tendremos

$$W = \frac{1}{2\lambda_o}\psi_o Ql\lambda\left(1 + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}\right)$$
$$W = \phi Ql\lambda\left(1 + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}\right).$$

La importancia de la expresión resulta ahora evidente: en la medida en que, para un esquema estructural dado existe un valor óptimo del canto, para dicho valor el factor de forma puede establecerse de modo concreto, y el término definido como esbeltez óptima en igual medida. Para dicha forma, en la que se admiten cambios de tamaño, de carga, o de canto —aceptando sólo cambios afines en la geometría— resultará que los coeficientes correspondientes al óptimo serán calculables, y fijos, quedando sólo como términos variables los Q, l y λ, resultando una sencilla y poderosa expresión para la cantidad de estructura. La forma elegida para representar W se debe a una consideración adicional. En la mayoría de las estructuras, las esbelteces óptimas resultan ser valores muy

bajos, de modo que las estructuras reales resultan con esbelteces apreciablemente mayores a éstas, pues en tales problemas deben optimizarse conjuntamente otros parámetros del problema del proyecto, como la superficie envolvente que debe cerrarse, o el volumen que debe acondicionarse, que mejoran apreciablemente aumentando la esbeltez. De este modo el segundo término del sumando, que nunca alcanzará la unidad, se hace poco relevante en buena parte de las situaciones reales, y la expresión es, por ello más adecuada a la comprensión de las variables en juego.

La cantidad de estructura es, por tanto, directamente proporcional a la carga, el tamaño —la luz en los casos de flexión— y la esbeltez utilizada, salvo un pequeño factor corrector que tiene escasa influencia en esbelteces altas alejadas de la óptima teórica.

Veremos esto con más detalle en el próximo capítulo.

7.4. Cantidad de estructura y peso propio

Vimos que la cantidad de estructura podía ponerse en relación con el volumen y con el peso de la estructura sin más que considerar las propiedades pertinentes del material empleado:

$$P = \frac{\rho}{\sigma} W$$

Además hemos visto que la expresión para la cantidad de estructura es del tipo

$$W = \gamma Q l \lambda$$

con γ constante en algún caso especial —por ejemplo si se consideran sólo los cordones de soluciones de canto constante, como veremos en el próximo capítulo— pero en general función de λ, aunque dependiente sólo levemente de ella en los casos de esbeltez alta.

Consideraremos ahora las relaciones posibles entre la carga total Q y el peso propio P. El caso de referencia más sencillo consiste en suponer que la forma con que ambas cargas se distribuyen es análoga, es decir que en todo caso la carga total y el peso mantienen a lo largo de la luz de la estructura la misma proporción, por lo que supondremos a partir de aquí que tal analogía de forma es aproximadamente cierta.

7.4.1. Alcance o tamaño insuperable.

Supongamos que tratamos de una solución —teórica— en la que la totalidad de la carga es peso propio, y no se admite más carga, por lo que la estructura está en el límite de resistencia sometida sólo a su peso propio. En este caso tendremos que la cantidad de estructura determina la carga totalmente. Supongamos para simplificar, además, que la estructura es estricta, es decir, que todo el material se emplea en su máxima tensión[8]. En este caso el peso de la estructura, que es

[8] Ignoramos en lo que sigue los efectos locales como pueden ser los de flexión secundaria de las barras que forman la estructura, que supondremos sigue manteniendo comportamiento local uniaxial.

la carga total, es la cantidad de estructura por el peso específico y dividido por la tensión de servicio.

$$W = \gamma P L \lambda = \gamma W \frac{\rho}{\sigma} L \lambda$$

por lo que eliminando W y despejando la luz L a la que corresponde dicha situación tenemos

$$L = \frac{1}{\gamma\lambda}\frac{\sigma}{\rho}$$

Cualidad importante de la expresión es que dicho tamaño es independiente de las dimensiones de las secciones de la pieza: vale para cualquier W o cualquier P —es independiente de W y de P—, es independiente, por tanto del propio peso de la estructura considerada y por ende vale cualquiera que sea el área básica de la ley de dimensionado elegida. El primer resultado es que el *alcance* de la estructura es independiente de su *dimensionado*.

Es fácil comprender esto, ya que si suponemos que una cierta estructura dimensionada estrictamente —con todas sus secciones sometidas a la máxima tensión admisible— está en su límite de resistencia sólo con su peso, aumentar todas las secciones proporcionalmente —manteniendo por tanto la misma ley de dimensionado— hace aumentar en la misma forma peso y resistencia, por lo que la estructura sigue estando en el límite de resistencia. De este modo el tamaño máximo que puede alcanzar no depende del dimensionado mismo.

Puede comprenderse además que si cambiásemos la resistencia del material, disminuyéndola por ejemplo a una fracción χ de la inicial, la luz alcanzable sería sólo esa misma fracción χ de la luz anterior L. Por la misma razón es fácil ver que la fracción de la tensión que corresponderá al peso propio en una estructura de luz $l = \chi L$ es precisamente $\sigma_p = \chi\sigma$, quedando el resto de la tensión disponible para resistir cargas adicionales.

De este modo el problema del peso propio puede tratarse geométricamente como un problema de tamaño. En dicho problema, alcanzado un *tamaño insuperable*, o *alcance*, la tensión del material se destina sólo a soportar el propio peso, siendo inviable la estructura para un tamaño mayor. Para tamaños menores al insuperable, o límite, la tensión empleada en sostener el propio peso es a la resistencia total diponible como el *tamaño* es al *alcance*.

$$\chi = \frac{l}{L} = \frac{\sigma_p}{\sigma}$$

Es importante señalar aquí que en la expresión del *alcance* aparecen como parámetros de la geometría de la estructura los términos adimensionales γ y λ, y que la dimensión —la longitud— la aporta la *longitud* del material, su *alcance* σ/ρ.

7.4.2. Carga y peso propio. Factor de ampliación de carga

Si la estructura soporta la suma del peso propio más la carga externa adicional a éste —$Q = P + R$— podemos determinar en base al apartado anterior qué parte de la tensión admisible del material se emplea para resistir su propio peso, usándose el margen que queda disponible para soportar el resto de la carga. Por ello, si las cargas y los pesos son homólogos en distribución a lo largo de la luz, la carga total será a la carga externa como σ a $\sigma - \sigma_p$. Puede verse de

inmediato que la relación entre la carga total y la carga aplicada ajena al propio peso depende sólo del parámetro χ.

$$\frac{Q}{R} = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_p} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_p}{\sigma}}$$

$$\frac{Q}{R} = \frac{1}{1 - \chi}$$

La expresión puede interpretarse como un factor de ampliación de la carga externa ajena al propio peso, ampliación necesaria para incorporar dicho peso propio. Es un factor de ampliación no lineal que depende de la proporción existente entre el *tamaño* de la estructura y el *alcance* de la solución empleada, proporción que ha sido denominada *talla* en alguna ocasión.

Nótese por tanto que tanto el *alcance* de la estructura L, como la *talla* χ, son magníficos candidatos para definir la *eficiencia* de la estructura, en tanto que permiten predecir, para cualesquiera tamaños del problema, la relación entre carga soportada y peso propio, relación que según vimos es una de las expresiones más utilizadas para evaluar la eficiencia relativa de las soluciones estructurales. Pues en efecto, dado el tamaño pretendido para la estructura, l, y el *alcance* L, su cociente χ (su *talla*) permite obtener dicha relación de eficiencia, siendo ésta tanto mayor cuanto mayor es el *alcance*

$$\frac{R}{P} = \frac{Q - P}{P} = \frac{1 - \frac{P}{Q}}{\frac{P}{Q}}$$

$$\frac{R}{P} = \frac{1 - \chi}{\chi} = \frac{1}{\chi} - 1$$

Sin embargo en la medida del alcance de una estructura o su talla queda incluida una dimensión procedente del material, por lo que para independizar el parámetro de medida de eficiencia de la forma respecto de las cualidades del material habremos de considerar sólo los términos dependientes de la estructura, a saber, γ, derivado de las propiedades geométricas generales del tipo empleado, y λ, su esbeltez, siendo la eficiencia inversamente proporcional al producto de ambos.

La eficiencia de un tipo estructural se mide, pues, por el inverso del producto de los parámetros de forma de la estructura que hemos denotado por γ y λ.

7.5. Cualidades geométricas: parámetros estructurales de la forma.

Revisemos nuevamente la expresión:

$$W = \gamma Q l \lambda.$$

Consideremos esta expresión genérica de la cantidad de estructura deslindando las cuestiones derivadas del problema estructural que debe ser resuelto de las cuestiones asociadas a la eficiencia con que se resuelve. Podemos ver que dos de los términos, Q y l, corresponden esencialmente a características del problema planteado, a saber, la luz a cubrir y la carga a soportar. Mientras que los otros dos, γ yλ responden a las decisiones tipológicas y geométricas adoptadas al

definir la estructura, y de las que depende la eficiencia de la estructura adoptada. Ambos definen realmente la *ineficiencia estructural*, inversa a la *eficiencia*, tal como la hemos considerado en el apartado anterior. Resulta alentador la sencillez obtenida, al constatar que los resultados a los que llegamos permiten afirmar con precisión que la cantidad de estructura invertida es proporcional tanto al tamaño del problema, como a la carga aplicada, como a la *ineficiencia* empleada en la solución, ineficiencia que nunca alcanzará el valor cero en las obras humanas.

La cantidad de estructura depende por tanto directamente de los términos:

Q La *carga* total a trasladar a los apoyos en el problema considerado. Incluye la totalidad del peso aplicado a la estructura, incluyendo el propio peso de la misma.

l La dimensión o *tamaño* del problema de flexión, entendida como la luz entre apoyos.

λ La *esbeltez* de la pieza.

γ Término que en su forma más general es dependiente de la esbeltez —del cociente entre esbeltez óptima y esbeltez real— y que queda determinado fundamentalmente por la geometría general de la solución. Ésta incluye como veremos más en detalle las condiciones de forma de la carga y su proximidad relativa al apoyo, las condiciones de la forma al llegar al apoyo, la geometría genérica de la sección, etc., condiciones todas ellas a las que podríamos englobar en la denominación *esquema* de la solución.

De los términos anteriores el término de carga remite, en forma que no cabe detallar más ahora, al concepto o idea de *dimensionado* o *espesor* de la estructura. La razón de ello es sencillamente que, para igual problema, distintas cargas supondrán distintos *dimensionados*, y que si el resto de las condiciones son iguales, es decir que, si esquema, tamaño y proporción son iguales, la diferencia de carga entre dos soluciones sólo supondrá diferencias entre los dimensionados de las secciones que mantendrán igual relación de proporcionalidad entre sí que la que mantengan las cargas totales aplicadas en las dos soluciones. Puede concebirse, por tanto, que las secciones de las piezas dependen de una ley o función definida para cada posición de la estructura, ligada a esquema y esbeltez de la estructura, y que puede establecerse para una cierta carga total dada definida como unidad, y que las secciones reales serán el resultado de multiplicar dicha función por la carga total considerada.

Vemos por lo tanto que pueden quedar descritos inicialmente como parámetros esenciales de la forma estructural los siguientes:

Tamaño Dimensión, o luz del problema. La luz de referencia de la estructura. Se trata de la la menor distancia entre las regiones de apoyo empleadas.

Proporción Esbeltez, relación luz-canto, proporción del recuadro rectangular que circunscribe la geometría de la solución, vista en alzado.

Esquema Características geométricas, y casi topológicas del tipo de solución adoptado tipo estructural: veremos más adelante que incorpora el tipo de sección, la forma de la carga, las condiciones de apoyo. Se caracteriza por

un factor de forma que resulta especialmente sensible a las condiciones de continuidad de las piezas flectadas, como veremos en el caso de las vigas. Es igualmente sensible, aunque con menos variabilidad, a las condiciones de apoyo disponibles —bordes paralelos o contorno de un recinto cerrado— y depende finalmente con sensibilidad menor aún de otros aspectos tipológicos, como el trazado de la estructura —siempre que éste responda a formas estructurales globalmente correctas—, etc.

Dimensionado o espesor o grosor de la solución estructural. Este término puede precisarse más y de forma adimensional, aunque no lo hagamos ahora rigurosamente, como la relación entre el espacio ocupado por la estructura y el máximo disponible para colocarla, una vez fijados los parámetros anteriores. Este sería el caso por ejemplo de la relación entre el ancho de una serie de vigas rectangulares paralelas que soportan un forjado dado, y la separación entre las mismas. Deriva directamente, una vez fijados los anteriores parámetros de forma, del valor de la carga aplicada a la estructura, y tiene una relevancia nula en las cuestiones asociadas a la comparación de la eficiencia estructural de tipos o soluciones alternativas.

Los tres primeros términos, junto con el *alcance* del material empleado determinan el alcance o tamaño insuperable del tipo estructural y la proporción elegidas, siendo el cociente entre el tamaño real y el insuperable, la *talla* de la estructura, la magnitud clave en la determinación de la relación entre el peso propio y carga útil que la estructura es capaz de soportar.

7.5.1. Tamaño y proporción en las estructuras

Los anteriores conceptos permiten una reformulación del problema de la relación entre la forma de la estructura y su comportaiento.

En la antigüedad clásica se concebía el comportamiento de las estructuras como un fenómeno principalmente ligado a la forma, y de entre los aspectos de ésta, a la geometría, al tratarse de la ciencia matemática con mayor desarrollo. Tal concepción sugería el uso de reglas proporcionales en el diseño, de modo que modelos probados en un tamaño se extrapolaban mediante reglas de proporción a otros tamaños, como ya hemos visto. Galileo demostró usando geometría que las reglas proporcionales no eran apropiadas para caracterizar la resistencia de estructuras soportando su propio peso, y su alegato tuvo una influencia importante. Las razones aportadas por Galileo, y más tarde —y especialmente por esta razón— el desarrollo y uso del análisis matemático como herramienta de reflexión estructural han eliminado casi por completo las reglas de proporción de la teoría de las estructuras. Hay que salvar los casos puntuales en que las expresiones se plantean en forma adimensional. Ello podría verse como una forma actual de establecer reglas proporcionales desprovistas de la carga geométrica —visual— de la antigüedad. Hay que decir que en el caso de encontrarse reglas proporcionales o geométricas válidas, éstas han de ser, como se verá más adelante, una poderosa herramienta de diseño.

Si se analiza el comportamiento de estructuras en función del tipo de carga que soportan, es fácil intuir que estructuras diseñadas para soportar cargas que actúen sobre superficies, y cuyos valores sean, por unidad de superficie, independientes del tamaño de la estructura considerada, llevarán a soluciones

proporcionales, en la medida en que aumentos paralelos de las áreas de carga y de sección, para esquemas estructurales idénticos y formas y secciones proporcionales mantendrán las tensiones en los materiales. Esta es la base de buena cantidad de diseños —proporcionales— de uniones o detalles, y como veremos, la base del comportamiento básico de las estructuras adinteladas concebidas para los problemas de uso ligados al empleo de planos paralelos usuales en edificación. Para cargas dependientes de masas, en cambio, y en particular para los pesos propios de las estructuras, la proporcionalidad no es aplicable, de modo que la geometría puede parecer inútil como herramienta. Aquí hemos mostrado cómo en este caso se trata igualmente de una herramienta de excepcional valor, pudiendo establecerse el problema del peso propio de estructuras cualesquiera en términos de su tamaño, y más precisamente, de la relación entre su tamaño y el tamaño máximo de estructuras semejantes que sólo se soportan a sí mismas —Tamaño Insuperable o Alcance—. De este modo, incorporando la noción de tamaño en la reflexión, puede darse cuenta también de las magnitudes dependientes del mismo, y deslindar su influencia del resto de los parámetros pertinentes en el diseño.

Capítulo 8

Consumo en tipos estructurales básicos

Vamos a recorrer ahora algunas estimaciones de las cantidades de estructura en tipos estructurales básicos. Dada la definición aportada en el capítulo anterior para esta la magnitud, sólo se están considerando en la exploración de los tipos estructurales correspondientes las necesidades derivadas del criterio de resistencia. Es decir que estaremos hablando de cargas, leyes de momento o cortante precisas para el equilibrio, etc., sin consideración aquí de las cuestiones de rigidez o estabilidad, aunque ya hemos visto la íntima relación entre la rigidez y la eficiencia medida por el inverso de la cantidad de estructura, relación que podremos emplear en caso necesario.

8.1. Cantidad de estructura de barras comprimidas o traccionadas

De la definición de la magnitud resulta evidente que ésta es, en barras comprimidas o traccionadas, igual al valor absoluto del esfuerzo de tracción o compresión por la longitud de la barra a lo largo de la que el esfuerzo se mantiene constante.

$$W = |N|l$$

La sencillez de la expresión es válida sólo en la medida en que le corresponde una sencillez análoga en el diseño de la barra, de sección constante. No se consideran aquí las necesidades de rigidez en el caso de la compresión, de cara a combatir el pandeo, o las peculiaridades de la realización de los nudos con que se enlazan las piezas con otras, que pueden suponer restricciones adicionales como cuando, en ciertos casos de piezas traccionadas, la unión tiene menor resistencia que la sección de base que enlaza.

8.2. Cantidad de estructura en vigas

Al analizar la cantidad de estructura en vigas debe hacerse mención al criterio elegido para definir éstas, entendiendo que, como primera aproximación, consideraremos bajo esta denominación sólo a las piezas de canto constante.

Aun con dicha restricción, el criterio con el que se diseñe la sección de la viga a lo largo de la directriz es básico en lo que sigue, existiendo en principio tres criterios usuales diferenciados, a saber:

- Diseño especializado y separado de cordones y del alma que une éstos. Es el único caso en que pueden obtenerse soluciones estrictas de modo general, constituyendo, por tanto, el caso paradigmático de la teoría de diseño. Correspondería al caso de piezas trianguladas o, en menor medida, al diseño de vigas armadas de chapa. Las decisiones de diseño sobre canto, espesor o sección de las alas, y espesor del alma son independientes.

- Diseño simultáneo de las alas y el alma, mediante la elección de un tipo básico de sección en el que las relaciones entre éstas son fijas, aun cuando puedan elegirse separadamente las dimensiones vertical y horizontal —canto y ancho o espesor— de la pieza. El caso paradigmático es el de las piezas realizadas con secciones homotéticas, como las rectangulares, en las que pueden, sin embargo, seleccionarse separadamente las dos dimensiones del rectángulo. También correspondería en alguna medida al diseño con perfiles laminados en acero si se consideran las posibilidades de elegir piezas no sólo en una de las posibles gamas sino en todas ellas, unido a la posibilidad de adosar lateralmente varias de esas piezas con igual canto para obtener anchuras variables. Las decisiones sobre canto y espesor son independientes, pero están ligadas las decisiones sobre espesor de las alas y del alma.

- Diseño regido por la selección de una sección de entre una serie monótona de ellas, como por ejemplo, al elegir entre secciones proporcionales de cualquier tipo, o en una de las series estandard de perfiles considerada aisladamente. En este caso la decisión sobre canto está ligada a las decisiones sobre espesor de alas y espesor de alma.

Aunque los tres casos son de interés, en lo que sigue se analiza sólo el primero de ellos, dado que un objetivo de este apartado es preparar herramientas para alcanzar en el próximo capítulo una visión colectiva de las soluciones alternativas a formas de cubierta, en las que este primer caso es de especial relevancia.

8.2.1. Cantidad de estructura en cordones de vigas

Dado que el esfuerzo de cada cordón no es más que el momento flector partido por el brazo de palanca, la cantidad de estructura dispuesta en los cordones de un elemento de viga será igual a dos veces el valor del momento partido por el brazo multiplicado por el elemento de longitud, o lo que es lo mismo, si el brazo es constante, la cantidad de estructura en cordones será igual al doble del área de la gráfica de momentos resistida por la viga partido por el brazo. Debemos distinguir entre momento solicitación y momento resistido. La cantidad de estructura estricta estará asociada a la gráfica de momentos solicitación, mientras

que el consumo real de material —de estructura— en la viga estará asociada a la gráfica de momentos resistida efectivamente por cada sección de ésta. Podemos emplear en ambos casos el término de *cantidad de estructura* correspondiente a las soluciones de sección estricta o la real, a fin de no añadir complejidad terminológica. Pero evitaremos la confusión entendiendo que el término se aplica en su acepción pura y rigurosa exclusivamente a estructuras diseñadas de forma estricta, mientras que en estructuras diseñadas con otros criterios el término se aplica de modo informal —y sin mayor pretensión teórica que el de dar una medida que mantenga en relación con la cantidad de estructura estricta la misma proporción que la que mantiene el peso de la estructura considerada con el peso de la correspondiente estructura estricta de igual material—. La cantidad de estructura asociada de dicho modo informal a una estructura real correspondería en puridad a la cantidad de estructura de aquella que se diseñase para resistir la ley de esfuerzos que resiste dicha estructura efectivamente. En todo caso solo usaremos dicho modo informal de empleo del término en casos de comparación con soluciones estrictas, de modo que el contexto evitará la confusión.

Por lo tanto la cantidad de estructura de cordones de vigas es:

$$W_M = \int |N|\, dl = \int 2\frac{|M|}{z}\, dl = 2\frac{\tilde{M}}{z}$$

denotando con $\tilde{M}$ al área de la gráfica de momentos.

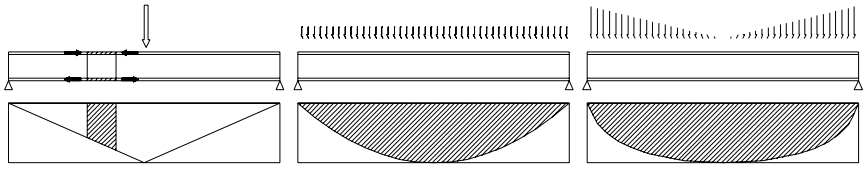


Figura 8.1: Gráfica de momentos y cantidad de estructura en cordones.

Es fácil obtener información relevante de esta magnitud, puesto que el área de la gráfica de momentos resistida por la viga es muy fácilmente determinable a partir de la luz de la viga, del momento isostático para el que ésta se diseña, y de las características de su diseño, como son fundamentalmente las condiciones de extremo y el dimensionado, ya sea constante o estricto, adoptado para sus cordones. Puede así establecerse el área en proporción a la del rectángulo formado por el isostático y la luz, considerando en lo sucesivo este área rectangular como área de referencia. Y por tanto puede evaluarse la cantidad de estructura basándose en el área de referencia multiplicada por la fracción que respecto de la misma supone la resistida por la viga de la solución considerada. Tenemos así una proporción entre la cantidad de estructura de cualquier solución, y la de la viga isostática de cordones constantes de igual momento isostático y canto, determinada directamente por la fracción entre las respectivas áreas de momento resistidas por ambas soluciones.

Algunos casos de dicha fracción ψ para cargas puntuales en el centro, uniformemente repartidas, o doblemente triangulares con valor nulo en el centro y máximo en los apoyos se anotan en la tabla siguiente. Se incluyen en ella igualmente los correspondientes valores de momentos negativos de extremo en los casos empotrados, en relación al isostático, $\frac{M^-}{M_I}$.

Tipo de viga y carga	**puntual**	**uniforme**	**triangular**
Fracción ψ del rectángulo $M_I l$			
Viga constante doblemente apoyada	1	1	1
Viga estricta doblemente apoyada	0,5	0,666	0,75
Viga constante doblemente empotrada	0,5	0,666	0,75
Viga estricta doblemente empotrada	0,25	0,25	0,21875
Fracción del momento negativo al isostático			
Viga constante doblemente empotrada	0,5	0,666	0,75
Viga estricta doblemente empotrada	0,5	0,75	0,875

Cuadro 8.1: Relaciones de cantidad de estructura en cordones a $M_I l$

Puesto que el área rectangular de referencia es el momento isostático por la luz, vemos que también puede evaluarse la cantidad de estructura en cordones como dos veces el producto del momento isostático por la esbeltez de la pieza y por la fracción del área de referencia que es efectivamente resistida por la viga.

$$W_M = 2\frac{\tilde{M}}{z} = 2\psi\frac{M_I l}{z} = 2\psi M_I \lambda$$

La importancia de esta expresión es que ofrece una posibilidad inmediata de interpretación en función de cualidades del problema y del diseño adoptado, como son el momento isostático, la esbeltez y las condiciones de extremo y de diseño de los cordones.

8.2.2. Cantidad de estructura en el alma de vigas

Puede mostrarse con facilidad que ésta es igual a dos veces el área de cortantes efectivamente resistida por la viga en los casos de alma llena y triangulaciones a 45°, multiplicada por un factor de ineficiencia que es mayor que 1 en triangulaciones con otros ángulos.

$$W_T = \int \frac{T}{\sin\alpha\cos\alpha}\,dl = \int \frac{2T}{\sin 2\alpha}\,dl$$
$$W_T > 2\tilde{T}$$

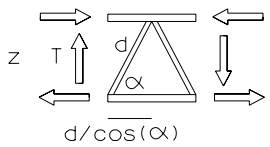


Figura 8.2: Cantidad de estructura en triangulación

Podemos ver que el área de cortantes en soluciones simétricas es dos veces el momento isostático. Pues en efecto la integral del cortante entre el punto de cortante nulo y el apoyo en tales soluciones es el momento isostático, al ser la diferencia de momentos entre vano y apoyo. Dicha integral es también la mitad del área de cortantes, por lo que resultará que

$$W_T > 4M_I$$

El signo de desigualdad da cuenta del factor de ineficiencia en tringulaciones diferentes de 45° así como del hecho de que el dimensionado puede no ser estricto. Algunos de estos factores de ineficiencia son fáciles de deducir, como los *sobrecostes* derivados del empleo del dimensionado constante frente al estricto, sin más que comparar las respectivas áreas de cortante efectivamente resistidas. En el caso de triangulaciones no óptimas, o de ángulos diferentes según familias de diagonales o montantes, basta hacer la suma de cada familia, resultando los sobrecostes ϱ de la tabla siguiente.

Tipo de alma	**factor de sobrecoste**
Alma continua o a 45° estricta	1
Alma constante (carga puntual)	1
Alma constante (carga uniforme)	2
Alma constante (carga bitriangular)	3
Soluciones a 30° o 60°	1,155
Soluciones a 45° y 90° (viga pratt)	1,5

Los sobrecostes por ineficiencia en el ángulo deben multiplicarse por los derivados de sobredimensionar el alma respecto de la estrictamente necesaria para la ley de cortantes existente cuando se dan simultáneamente ambas circunstancias.

8.2.3. Cantidad de estructura total en vigas

Si sumamos las cantidades de estructura en cordones y triangulación tendremos expresiones que agrupan las áreas de momentos y las de cortantes. La expresión definitiva es del tipo

$$W_v > 2\psi M_I \lambda + 4\varrho M_I$$
$$W_v > 2M_I \lambda \psi \left(1 + \frac{2\varrho}{\psi\lambda}\right)$$

Puede observarse que el término constante dependiente del cortante puede ser de muy baja importancia en los casos de esbelteces usuales en edificación. La cantidad de estructura puede escribirse en términos de la carga total, y por ejemplo, para carga uniforme, con $M_I = ql^2/8 = Ql/8 = Q/2 \cdot l/4$, resulta de la forma

$$W_v > \psi Q \frac{l}{4} \lambda \left(1 + \frac{2\varrho}{\psi\lambda}\right).$$

Para cualquier distribución simétrica resulta que el momento isostático puede obtenerse como producto de la reacción en un apoyo —la mitad de la carga— por la distancia a la resultante de la carga de la viga que se equilibra sobre dicho apoyo, o lo que es lo mismo, la longitud que mide la distancia media de la carga al apoyo, en la forma $M_I = Q/2\,\phi l$ por lo que

$$W_v > \psi Q \phi l \lambda \left(1 + \frac{2\varrho}{\psi\lambda}\right).$$

Resulta ϕ igual a $\frac{1}{2}$ para carga puntual en el centro, $\frac{1}{4}$ para carga uniforme, y $\frac{1}{6}$ para carga triangular entre el centro y el apoyo, tal como se representan en la figura 8.1.

8.3. Cantidad de estructura en arcos funiculares

Para poder comparar soluciones consideramos ahora el caso de arcos en los que el empuje se resuelve atirantando, y en los que las cargas se sitúan en la línea horizontal definida por el tirante, colgándose del arco mediante péndolas verticales. Suponemos el trazado del arco igual al antifunicular de las cargas, con apoyo en la misma cota vertical que éstas. En este caso la cantidad de estructura es la correspondiente a la suma de las del tirante, las péndolas y el arco. La del tirante no es más que el empuje por la luz del arco. La de las péndolas no es más que la necesaria para colgar la carga del arco. Puede demostrarse, y lo veremos más adelante, que la cantidad de estructura del arco es idéntica a la suma de las anteriores, tirante más péndolas, por lo que su valor total sería fácil de cuantificar.

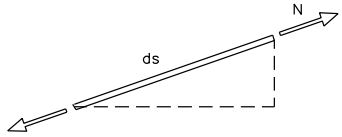


Figura 8.3: Producto escalar fuerza–longitud.

Vamos a comprobar de todos modos la cantidad de estructura que resulta en el arco, considerando que el esfuerzo y el elemento de longitud son colineales:

$$W_a = \int \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{ds} = \int (H\,dx + T\,dz)$$

Como la componente horizontal H es constante, puede integrarse el primer sumando. Para el segundo empleamos la integración por partes, y el hecho de que la derivada de los cortantes globales son las cargas

$$W_a = Hl - \int z\frac{dT}{dx}\,dx = Hl + \int pz\,dx$$

En la integración por partes se ha empleado el hecho de integrar entre dos puntos que tienen, bien cortante cero —el eje de simetría de la estructura—; bien cota vertical cero —los apoyos del arco— de modo que el resultado confirma la afirmación: la cantidad de estructura del arco es igual a la del tirante Hl más la de las péndolas, que es la que resulta medida por el segundo sumando.

Veamos pues el valor que resulta para el conjunto completo;

$$W_A = 2\left(Hl + \int pz\,dx\right) = 2\left(Hl + \int \frac{dT}{dx}z\,dx\right) = 2\left(Hl + \int T\frac{dz}{dx}\,dx\right)$$
$$W_A = 2\left(Hl + \int T\frac{T}{H}\,dx\right) = 2T_0 l\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\int\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\frac{dx}{l}\right)$$

siendo α el cociente T_0/H, es decir la tangente del ángulo del arco en su arranque. En la expresión puede observarse que la cantidad de estructura tiene cuatro partes, dos comprimidas, procedentes del cálculo del arco, y dos traccionadas,

procedentes de tirante más péndolas. La cantidad comprimida total iguala la traccionada total. Pero además, tanto la cantidad comprimida como la traccionada tienen otras dos partes, que pueden interpretarse como cantidad horizontal —la asociada a la componente horizontal H del tirante en éste, o ejerciendo su empuje a lo largo del arco— y vertical —la correspondiente a subir las cargas desde la línea entre apoyos al arco a través de las péndolas y volver a bajarla a través del arco—. La solución de mínima cantidad de estructura, la óptima, es la que resulta cuando se igualan las cantidades de estructura horizontal y vertical, quedando igualadas las cuatro partes citadas.

Si por ejemplo consideramos el caso de carga uniformemente repartida, tenemos $T_0 l = 4M_I$, como puede verse con facilidad en la figura 8.4, y $\alpha = 4/\lambda$, siendo λ la esbeltez del arco. Asimismo, el multiplicando entre paréntesis de la derecha, expresado en función de la esbeltez, resulta igual a $\lambda(1/4 + 4/(3\lambda^2))$, de modo que para ese caso la cantidad de estructura total puede expresarse en la forma

$$W_{Au} = 2M_i\lambda\left(1 + \frac{16}{3\lambda^2}\right)$$

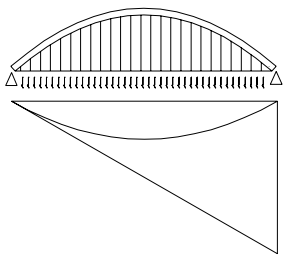


Figura 8.4: Arco parabólico para carga uniforme.

Un formato interesante para la anterior expresión se obtiene si se considera que la esbeltez óptima será aquella para la que se anule la derivada de W respecto de la esbeltez, lo que es trivial al ser M_I independiente de ésta. Esto sucede en este caso cuando $\lambda_o = \frac{4}{\sqrt{3}}$, con lo que resultará la expresión

$$W_A = 2M_I\lambda\left(1 + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}\right)$$

que puede demostrarse es de aplicación cualquiera que sea la ley de cargas considerada, y la correspondiente forma del arco trazado. Basta expresar la componente horizontal y la cota z del arco en función de la ley de momentos M, el momento isostático M_I, y el canto máximo del arco h:

$$W_A = \int 2\frac{M}{z}\,dx + \int 2zp\,dx$$
$$W_A = \int 2\frac{M_I z}{zh}\,dx + \int 2\frac{hM}{M_I}p\,dx$$
$$W_A = 2M_I\lambda + 2\frac{\int lMp\,dx}{M_I\lambda}$$
$$W_A = 2M_I\lambda\left(1 + \frac{\int lMp\,dx}{M_I^2\lambda^2}\right)$$

con óptimo para

$$\lambda_o = \frac{\sqrt{\int lMp\,dx}}{M_I}$$

lo que prueba la expresión.

El interés de ésta consiste en que, como hemos dicho antes, en situaciones de simetría, el momento isostático es igual a la reacción —la mitad de la carga— multiplicada por la fracción ϕ de la luz correspondiente a la distancia media de la carga al apoyo, distancia que queda fijada por el tipo de carga. De este modo $M_I = T_0\phi l = Q/2\phi l$, y resulta como expresión para la cantidad de la estructura la siguiente:

$$W_A = \phi Ql\lambda\left(1 + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}\right)$$

expresión que tiene una altísima *expresividad*. Recordemos que ϕ vale 1/2 con cargas puntuales, 1/4 con carga uniforme, y 1/6 con carga bitriangular.

8.4. Cantidad de estructura en cerchas de canto variable

Una vez analizados los casos de estructuras en flexión de canto constante —vigas— y de componente horizontal constante —arcos— podemos estimar la cantidad de estructura en cerchas, en las que no son constantes ni el canto ni la componente horizontal existente en cordones. Ahora bien, en este momento no nos interesa tanto el detalle de su cantidad de estructura, como su magnitud en relación con las ya estimadas, por lo que vamos a cambiar la forma del razonamiento, para acercarla a un formato más *gráfico*, y por tanto más potente en su capacidad descriptiva.

Recordamos que hemos obtenido expresiones tanto para vigas como para arcos, de las que consideraremos ahora las correspondientes a estructuras dimensionadas estrictamente.

En el caso de las vigas la cantidad de estructura incluía dos partes. La primera parte corresponde a los cordones, responsables de la resistencia a momentos, con canto constante y por tanto componente horizontal variable proporcional a dicha ley. La segunda parte corresponde a las diagonales y montantes, responsables por tanto de la resistencia frente a los cortantes.

La expresión $W = 2\tilde{M}_I/z + 2\tilde{T} = 2\tilde{M}/z + 4M_I$ puede representarse en una figura en la que se sombrea el área de la gráfica de momentos, y el área de la de cortantes, que estarán entre sí en proporciones que pueden deducirse con

facilidad usando como unidad de la gráfica el área del rectángulo $M_I l$: en la figura 8.5 correspondiente a carga uniforme el factor de escala en las gráficas es $\alpha = 4/\lambda$, factor que procede de igualar las razones entre las áreas sombreadas y las cantidades de estructura:

$$\frac{\alpha\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{4M_I}{2\frac{\bar{M}}{z}}$$
$$\alpha = \frac{4}{3}\frac{4}{2\frac{2\lambda}{3}}$$
$$\alpha = \frac{4}{\lambda}$$

En el caso de la estructura funicular, el arco, la cantidad de estructura puede representarse por las áreas sombreadas correspondientes a la parte horizontal, que ahora es el recuadro rectangular completo $M_I l$, a la misma escala que el de la viga, que representa la cantidad de estructura horizontal, más el alzado del arco que representa la parte vertical, con factores de escala que ahora son

$$\frac{\alpha\frac{2}{3}}{1} = \frac{\frac{16}{3\lambda^2}}{1}$$
$$\alpha = \frac{8}{\lambda^2}$$

Puede verse en las correspondientes figuras la cantidad de estructura asociada a la existencia en cordones de la componente horizontal, constante en el arco, y variable en la viga.

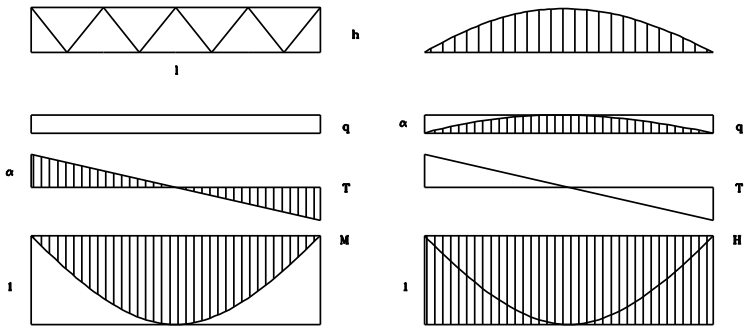


Figura 8.5: Representación gráfica de la cantidad de estructura

Una forma muy expresiva para unificar las escalas relativas de las figuras de cara a comparar las de formas en competencia es unificar la escala de momentos entre las diferentes soluciones y figuras para el valor de H y, por tanto, escalar las figuras que expresan el doble del área de la gráfica de momentos al recinto definido por el rectángulo en el que un lado corresponde a la luz de la viga, y el otro a la componente en cordones correspondiente al momento isostático y el canto h —o la esbeltez de la pieza λ— Dado que la cantidad de estructura es una magnitud con dimensiones de trabajo, resulta natural que una dimensión

corresponda a longitudes —la luz— y la otra a fuerzas —hasta la máxima componente horizontal H en *cordones*— Debe tenerse en cuenta el factor 2 —dos cordones, o cantidades horizontales comprimida y traccionada— Deberá entonces dibujarse la segunda gráfica a la misma escala para poder superponer las correspondientes áreas. En la viga se trata del doble del área de la gráfica de cortantes y por tanto la gráfica a considerar es la de la ley de cortantes, que se representará a la misma escala que la elegida para representar H. En el arco se debe elegir la escala de las dimensiones verticales de la forma del arco de tal modo que el producto $p \times z \times 1$ esté en la misma escala de las fuerzas H. De este modo bastará sumar directamente las dos áreas de que se compone el coste en cada caso. Hay que hacer notar que este dibujo resulta trivial en el caso de usarse una forma afín a la original pero para una esbeltez, que podemos llamar esbeltez de referencia (λ_R), que iguale el canto a la distancia media de la carga al apoyo. En apartados anteriores habíamos llamado ϕl a dicha distancia, de modo que la esbeltez de referencia sería la correspondiente al canto $h = \phi l$ es decir $\lambda_R = \frac{l}{\phi l} = \frac{1}{\phi}$.

Efectivamente, en este caso resultará que para la correspondiente forma la componente horizontal máxima se hace igual a la reacción en cualquiera de los apoyos —es decir al valor del cortante en el apoyo—. De este modo las figuras pueden trazarse de forma inmediata. En el caso de la viga bastará sumar a la gráfica de las áreas de momentos las áreas de cortantes —triangulares en el caso de carga uniforme— que como hemos visto tienen un valor máximo igual a H. En el caso del arco, bastará añadir una forma proporcional a la del producto de la forma del arco por la de la carga —si ésta es uniforme resultará una transformación afín a la forma original— cuya cota máxima iguale la mitad del valor de H usado en la gráfica rectangular, dado que podemos expresar la correspondiente cantidad de estructura vertical en la forma $2\int qz\,dl = 2q_{max}hl\int \frac{q}{q_{max}}\frac{z}{h}\frac{dl}{l} = 2q_{max}hl\alpha$, siendo α la proporción del recuadro representado por el producto de $q_{max}h \times l$. En el caso de carga uniforme, como $qhl = q\frac{l}{\lambda}l = 2\frac{ql}{2}\frac{l}{\lambda}$, para la esbeltez de referencia tendremos $qhl = 2T_0\frac{l}{4} = \frac{1}{2}T_0 l = \frac{1}{2}Hl$, lo que justifica la afirmación precedente.

Para una esbeltez real diferente de la que hemos llamado esbeltez de referencia, alteraremos la escala de las figuras consecuentemente. En el caso de las vigas resulta que la cantidad de estructura que se altera es la parte derivada de resolver los cordones, de modo que bastará cambiar la escala relativa de la parte expresada en términos de H de acuerdo al cociente entre la esbeltez real y la de referencia —o a la inversa si reescalamos la gráfica de cortantes—. En el caso del arco, la alteración de la esbeltez altera en sentidos opuestos ambas componentes de coste. Por ejemplo, reducir el canto aumenta la componente horizontal disminuyendo la vertical. De tal modo que ahora las alteraciones de escala respecto a la de los dibujos para la esbeltez de referenciaa serán en ambas componentes, o si la hacemos en sólo una de las componentes, será en proporción al cuadrado del cambio —o cociente— entre esbelteces.

Puede verse el procedimiento en la figura 8.6.

Con estas ideas podemos ahora estimar la repercusión de decisiones formales diferentes, como es la cercha correspondiente al cuchillo español, o el clásico triángulo en las soluciones de diente de sierra. En ambas puede constatarse, en la posición del apoyo en el que concurren el cordón horizontal y el inclinado que, desde el punto de vista estructural, correponden a apoyos idénticos a los

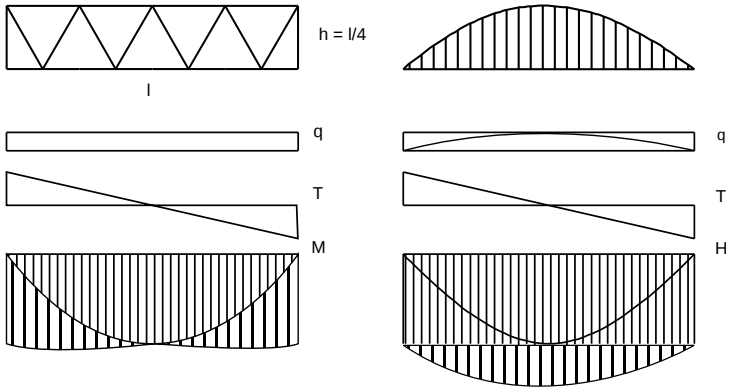


Figura 8.6: Escalas para la cantidad de estructura

que representaría un arco tangente a dichos cordones en el arranque. Dado que la carga es uniforme y el diagrama de momentos parabólico, dicho *arco* tiene canto mitad que el de referencia —en el centro del vano— en el caso del cuchillo español, y canto igual a un cuarto de aquél en la forma triangular, cantos que pasan a ser igual al de la viga de referencia en el centro, y en el otro apoyo respectivamente. En ambas posiciones, pues, la cantidad de estructura horizontal quedará definida por un punto adicional, similar al de la viga de referencia en la misma sección. Entre ambos puntos, la línea a trazar, que representa la componente horizontal a lo largo del cordón inferior es fácil de determinar: dado que el producto de la fuerza horizontal por el canto debe dar una ley parabólica de momentos, y dado que el canto sigue una ley lineal, la fuerza horizontal seguirá igualmente otra ley lineal. Esto fija inmediatamente la gráfica correspondiente a la componente horizontal en cordones.

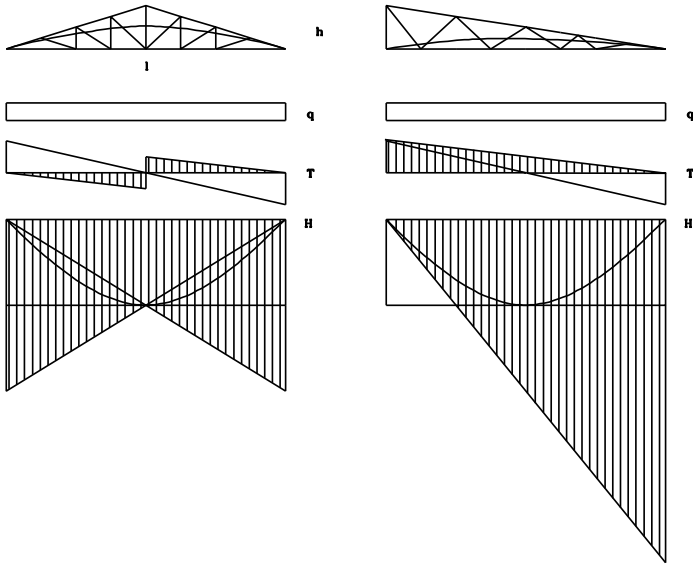


Figura 8.7: Cantidad de estructura y ángulo de arranque en apoyo

Para determinar la parte correspondiente a la triangulación, hay que tener en cuenta que será nula en el apoyo en el que concurren dos cordones, como en el arco, y que la componente vertical en los cordones, —que en el apoyo es equivalente al cortante— seguirá, desde dicho apoyo una evolución proporcional a la de la componente horizontal, por lo que puede trazarse la diferencia entre la gráfica de cortantes y la componente vertical aportada por dicha componente, obteniendo de este modo el área de fuerzas tangentes verticales a resistir por la triangulación, área que nos aportará una idea de la cantidad de estructura contenida en dicha triangulación que, como se observa, opera en el sentido de trasladar las cargas en dirección contraria a los apoyos próximos en las regiones en que se unen ambos cordones.

Las gráficas resultantes dan una magnífica idea de la inadecuación de las formas elegidas, inadecuación que se debe al escaso ángulo de arranque en éstas, y que puede corregirse con alguna de las alternativas presentadas en las figuras siguientes, con una importantísima mejora en la eficiencia alcanzada.

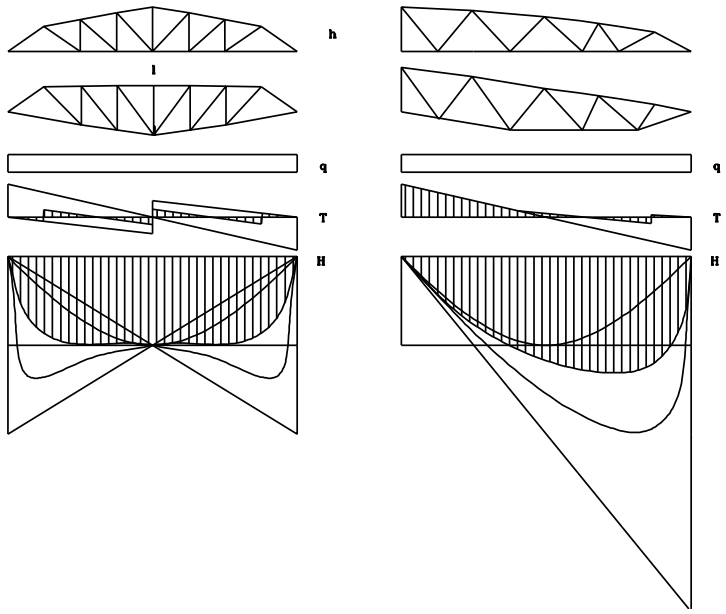


Figura 8.8: Formas mejoradas para cerchas.

Este ejemplo permite mostrar con cierta claridad un aspecto adicional en la forma a los ya planteados hasta aquí. No se trata ahora sólo del problema del tamaño l de la forma, ni del de su esbeltez λ, determinantes en el consumo en estructura en forma análoga a las cargas que han de sostenerse, sino en el problema de la esbeltez local implícita por una importante lejanía de la solución adoptada respecto de la que sería óptima, y que como hemos visto correspondería a un ángulo en el arranque de 90°, puesto que concurren dos barras, una comprimida y otra traccionada, defecto que además se produce en el punto donde la *carga* es mayor, y donde por tanto las exigencias de ajuste de la forma son mayores, es decir en el apoyo.

De este modo una importante conclusión será la necesidad de cuidar ade-

cuadamente las condiciones en el arranque de la estructura que serán, junto con las cualidades globales de la forma, determinantes en el consumo final.

8.5. Cantidad de estructura en otros tipos estructurales

Puede hacerse un recorrido más extenso por otros tipos estructurales, en particular los que corresponden a soluciones superficiales, como placas o láminas. Para ello bastará estudiar, como en los casos anteriores, las sumas de las cantidades de estructura de sus distintos elementos.

De entre tales tipos son de interés los que tienen apoyo sobre el perímetro de un recinto, como las placas o las familias de vigas cruzadas, o radiales, que frente a las vigas o arcos colocados paralelamente suponen una solución diferente desde la perspectiva de las cualidades del apoyo, y podrían igualmente ser consideradas diferentes en algunos casos desde la perspectiva del comportamiento estructural, al incluir casos de flexión bidireccional frente a la flexión unidireccional de las vigas.

A título de ejemplo consideraremos sólo dos casos particulares, a saber, la solución de vigas radiales de canto constante para resolver la cubierta de un recinto de contorno circular, y la solución para el mismo problema mediante un conjunto de vigas radiales y circunferenciales que puedan considerarse equivalentes a una solución de placa de dimensionado estricto, hacia donde apunta la solución del velódromo de Berlín. Analizaremos ambos casos para carga uniforme por unidad de superficie.

8.5.1. Cantidad de estructura de vigas o cerchas radiales sobre apoyo circunferencial.

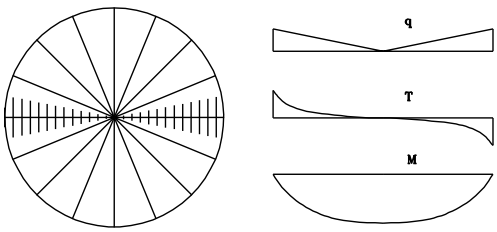


Figura 8.9: Cerchas radiales.

En este tipo, la carga aplicada a cada cercha es la de sectores de círculo, de modo que se trata de cargas triangulares de valor nulo en el centro, y máximo en el apoyo. De hecho las expresiones que hemos obtenido para las vigas en general son de aplicación si el canto es constante sin más que considerar el caso de carga apropiado. Si suponemos dimensionado estricto y triangulación óptima,

$$W = 2\frac{\tilde{M}}{z} + 2\tilde{T} = 2\psi M_I \lambda + 4M_I$$

Si referimos el problema a la unidad de longitud en el contorno, resulta que la reacción es la carga lineal unitaria máxima multiplicada por la luz y dividida por

4; la resultante de la carga está colocada a una distancia del apoyo equivalente a un sexto de la luz, de modo que el máximo momento es $ql^2/24$ —frente al $ql^2/8$ de las vigas paralelas— con ley de momentos de tercer grado. El factor ψ es, pues, 3/4. Por unidad de longitud del contorno el ahorro del dimensionado estricto frente al dimensionado constante de los cordones es de 1/4. Para el dimensionado de la triangulación la carga triangular supone una reacción igual a la carga lineal máxima multiplicada por un cuarto de la luz, y la ley de cortantes parabólica supone un área estricta igual al tercio de la correspondiente al dimensionado constante.

Resultan pues, para dimensionado constante, y llamando Q a la carga total sobre cada cercha:

$$W_M = 2\frac{ql^2}{24}\lambda = \frac{1}{6}Ql\lambda;$$

$$W_T = 2\frac{ql}{4}l = Ql$$

Los ahorros sobre estas cantidades correspondientes al dimensionado estricto son de 1/4 en cordones y 2/3 en la triangulación.

Si consideramos el conjunto de cerchas que cubren todo el recinto, acumularán en total una carga que ahora es $Q = \pi R^2 q$ que es la que podremos emplear en el cálculo con las fórmulas precedentes dado el carácter aditivo de la magnitud considerada y la igualdad en las expresiones para todas las cerchas de que se componga la estructura completa.

8.5.2. Cantidad de estructura de "Placa" circular

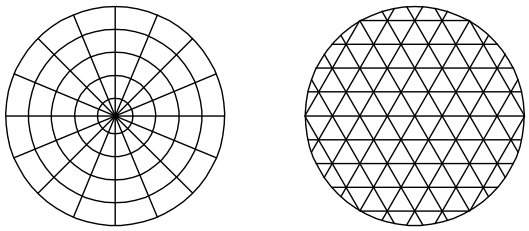


Figura 8.10: Dos formas de ver la "Placa" triangulada.

El caso de la placa merece atención, pues se trata de una alternativa bidireccional a la red radial de cerchas. Consideraremos aquí como *placa* una solución bidireccional triangulada, no necesariamente isótropa (por diferencia de dimensionado en direcciones ortogonales). Dada la simetría axial, se trata más bien de un emparrillado de vigas radiales y circunferenciales, en el que, al coincidir las direcciones principales de rigidez con las direcciones principales de esfuerzos, el comportamiento es de *placa*. Pero se trata de un problema que, desde la perspectiva del análisis es hiperestático, lo que exige para éste un dimensionado detallado. Ahora bien, desde la perspectiva del diseño los casos que son hiperestáticos para el análisis no suponen por el contrario mayor problema en ninguna de las circunstancias en que usualmente se presentan. Pues en efecto, lo que establece la teoría es que en las estructuras hiperestáticas deben cumplirse simultáneamente las condiciones de equilibrio, las de compatibilidad, y las que

expresan las relaciones materiales, y esto puede establecerse directamente en las restricciones del diseño que se adopta.

Actuamos, pues así. Para ello debemos establecer un sistema de esfuerzos en equilibrio entre sí y con las cargas. Debe igualmente establecerse un dimensionado de la estructura que, para este sistema de esfuerzos, haga que las deformaciones resultantes de las condiciones que regulan las relaciones entre deformación y esfuerzo —relaciones constitutivas de los materiales— sean directamente compatibles.

Usemos como forma de referencia la primera versión de las de la figura 8.10 y elijamos como sistema de esfuerzos equilibrados los que resultan de igualar todos los momentos flectores circunferenciales —es decir, exactamente el sistema de esfuerzos que el modelo de placas en rotura atribuye a la placa circular isótropa—. Como relaciones constitutivas emplearemos las que ligan momentos con curvaturas, ignorando las que ligan cortantes con distorsiones[1]. Elegimos finalmente como deformación compatible en cordones la que resulta de considerar las curvaturas de una deformada esférica en toda la superficie, lo que para canto constante y deformaciones pequeñas provocará curvaturas constantes en todo punto y dirección, y por lo tanto momentos en las secciones en proporción directa a las dimensiones establecidas en los cordones. Con estas condiciones resultará que basta elegir una ley de momentos equilibrada para ser resistida por las secciones, y dimensionar estrictamente éstas, para asegurar el equilibrio y la compatibilidad respetando las relaciones constitutivas aplicables.

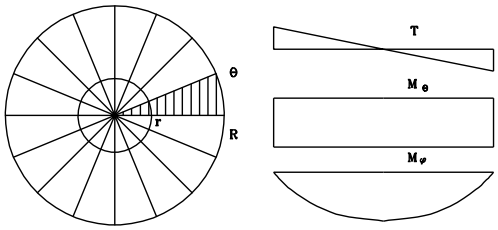


Figura 8.11: Leyes de esfuerzos en losa.

Resulta entonces que los cortantes son iguales a la carga del sector esférico que soportan y los momentos circunferenciales son iguales en toda sección radial a $ql^2/24$. Los momentos radiales pueden determinarse a partir de éstos y de los cortantes, resultando una ley parabólica con máximo en el centro, que, expresada en función del diámetro ϕ considerado, queda de la forma

$$M_r = \frac{ql^2}{24}\left(1 - \left(\frac{\phi}{l}\right)^2\right).$$

Con todo ello podemos proceder. Tendremos en primer lugar que la cantidad de estructura que resulta en montantes y diagonales en la solución estricta será la misma que la ya obtenida en el caso anterior, al tratarse sólo de cortantes en la dirección radial. En efecto, si el dimensionado es estricto, como la ley de cortantes es

[1] Podemos observar que los cortantes están sólo en las direcciones radiales y que la distorsión que les corresponde no afecta a las longitudes de los cordones de la versión de "placa" considerada de entre las reflejadas en la figura 8.10.

$$Tr\theta = \frac{\theta r^2}{2},$$
$$T = \frac{qr}{2}$$

tendremos que el doble del volumen de cortantes en toda la *placa* será

$$W_T = 2\int \frac{qr}{2} 2\pi r\, dr = 2\pi q \frac{R^3}{3} = \frac{1}{3} Ql$$

La cantidad de estructura teórica para dimensionado constante —cuando la densidad de barras del alma es isótropa e igual en toda la superficie a la requerida junto a los apoyos— sería:

$$W_T = 2\pi R^2 T_m = QR = \frac{1}{2} Ql$$

La cantidad de estructura en cordones resultará de la suma de la de los cordones radiales y la de los circunferenciales. Si empleamos la expresión de dos veces el área de momentos dividida por el canto, extendida a toda la superficie de la placa, tendremos como cantidad de estructura el producto de dos veces el volumen de momentos dividido por el canto. La mejor manera de obtener éste es obtener el valor suponiendo que el momento fuese constante —para dimensionado constante en ambas direcciones— y restar la parte de volumen que corresponde a la parte variable del momento radial.

El doble del volumen de ambos momentos dividido por z para dimensionado constante es:

$$W_M = \pi R^2 \frac{2}{z}\left(2\frac{ql^2}{24}\right) = q\pi R^2 \frac{l}{z}\frac{l}{6}$$
$$W_M = \frac{1}{6} Ql\lambda.$$

El ahorro por dimensionado estricto para los momentos radiales es, en volumen de momentos, y referido al momento máximo M

$$\tilde{M}_{ar} = M\int_0^R \left(\frac{\phi}{l}\right)^2 2\pi r\, dr = MR^2 \int_0^R \left(\frac{r}{R}\right)^2 2\pi \frac{r}{R}\left(\frac{dr}{R}\right) = M\frac{\pi R^2}{2}.$$

Como puede verse equivale a la mitad del volumen correspondiente a los momentos radiales si se utilizase dimensionado constante para M, y por tanto a la cuarta parte del total del volumen de momentos. El ahorro total para dimensionado estricto respecto del volumen obtenido con dimensionado constante es pues de un cuarto de la cantidad de estructura total en cordones.

Puede verse que la solución estricta es idéntica en cantidad de estructura a la de cerchas radiales, lo que tiene una fácil explicación en base a los conceptos ya obtenidos en la sección 7.2: si dibujamos la deformada correspondiente al dimensionado estricto, resulta en ambos casos una deformada esférica por la parte de la deformación de cordones —por momentos— más una distorsión análoga dada la simetría radial para la deformación por cortante, que, por lo tanto iguala ambas deformadas, pues en la medida en que la curvatura depende de la deformación unitaria del material y el canto, resultan curvaturas esféricas idénticas. En razón de dicha identidad, la pérdida de energía potencial de las

cargas es idéntica y por lo tanto lo es la cantidad de estructura de ambas soluciones. La diferencia total entre las soluciones de cerchas radiales de dimensionado constante y la distribuida de placa, también con dimensionado constante, es en este caso debida sólo a la diferencia de dimensionado en las triangulaciones. Lo que sucede en éstas es que al tratar de mantener las dimensiones constantes resultan sobredimensionados mayores en el caso radial que en el distribuido de placa, pues en la solución radial las mismas barras tienen separaciones circunferenciales que disminuyen según nos acercamos al centro.

8.6. Resumen de valores de cantidad de estructura.

No vamos a seguir con más tipos, pues para comprender las cualidades de las soluciones obtenidas es útil revisar ahora nuevamente algunas de las propiedades fundamentales de la magnitud que estamos empleando, y las relaciones que mantiene con otras magnitudes en las estructuras para las que se hace mínima, que serían las óptimas desde este punto de vista.

Por otro lado, para enunciar las principales relaciones entre esta magnitud y las cualidades de la forma nos basta por ahora con los casos anteriores, que habrá todavía que analizar con más detalle desde conceptos propios de la forma misma.

Incluimos en cualquier caso aquí una pequeña tabla resumen de valores obtenidos hasta el momento, y aplicados ya a la comparación de soluciones estructurales. Por ello la tabla se aplica sólo a problemas de carga comparable: a problemas de carga uniforme por unidad de superficie.

En todos los casos unificamos el formato a expresiones dependientes de la carga total Q, la luz l, y la esbeltez λ.

Tipo estructural	Dimensionado: estricto	constante
Viga doblemente empotrada	$Ql\left(\frac{\lambda}{12}+\frac{1}{2}\right)$	$Ql\left(\frac{\lambda}{6}+1\right)$
Viga doblemente apoyada	$Ql\left(\frac{\lambda}{6}+\frac{1}{2}\right)$	$Ql\left(\frac{\lambda}{4}+1\right)$
Arco parabólico	$Ql\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{4}{3\lambda}\right)$	–
Arco cúbico (arcos radiales)	$Ql\left(\frac{\lambda}{6}+\frac{6}{5\lambda}\right)$	–
Cerchas radiales	$Ql\left(\frac{\lambda}{8}+\frac{1}{3}\right)$	$Ql\left(\frac{\lambda}{6}+1\right)$
Placa circular	$Ql\left(\frac{\lambda}{8}+\frac{1}{3}\right)$	$Ql\left(\frac{\lambda}{6}+\frac{1}{2}\right)$

8.7. Esbeltez óptima. Expresión general de la cantidad de estructura.

Hemos visto en los apartados precedentes que la cantidad de estructura resultaba ser el producto de la carga total por la luz multiplicado por un término que en muchos casos es igual a la suma de una constante con el producto de la esbeltez por un número. En otros casos, la constante que se suma está sustituida por el producto de un número con el inverso de la esbeltez.

Pueden expresarse todos los casos vistos en el formato

$$W \geq \phi Ql \left(\lambda + \frac{\alpha}{\lambda^i}\right)$$

siendo i cero o uno.

Si analizamos la expresión desde la perspectiva del óptimo, comprobamos que el caso de $i = 0$ es teóricamente insatisfactorio: la esbeltez óptima resultaría la menor posible o la estructura óptima la de canto mayor posible —tendiendo éste, por tanto al infinito—. Pero con ese canto es irrealizable la triangulación a 45°. Igualmente puede decirse que el alma de la viga de alma llena resultaría de espesor nulo. Para muy bajas esbelteces el canto debe resultar gravoso para la cantidad de estructura, y podemos considerar que el correspondiente término suponga costes proporcionales al canto mismo para una luz dada por ejemplo por razón de la necesidad de un espesor mínimo, y por lo tanto inversamente proporcionales a la esbeltez, como resulta en el caso de los arcos analizados. En este caso en la forma general debería ser $i = 1$. De ésta puede deducirse la siguiente expresión

$$W \geq \phi Ql\lambda \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda^2}\right)$$

Ahora bien, es fácil ver que la última expresión puede ser escrita en función de la esbeltez para la que resultaría óptima la estructura —para la que la cantidad de estructura alcanzaría un mínimo—, pues si en la cantidad de estructura suponemos carga y luz constantes y se varía la esbeltez el mínimo se dará para el caso en que la derivada respecto de ésta se anule, lo que sucede cuando $\alpha = \lambda_o^2$. De este modo

$$W \geq \phi Ql\lambda \left(1 + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}\right) = \gamma Ql\lambda \tag{8.1}$$

La última forma de la expresión, idéntica a la deducida teóricamente en el apartado 7.3 es de aplicación aun siendo γ función de λ, si se considera que en los casos más usuales la esbeltez real será alta en comparación con la óptima, y el término que disminuye con la esbeltez resultará pequeño —despreciable incluso a veces— en comparación con el otro.

Podría considerarse una forma algo más compleja si se completa el polinomio entre paréntesis con el término del grado que falta, —que por suponer consumo constante e independiente de la esbeltez no afectaría al óptimo— para lo que cabe proponer la forma más general, aunque menos expresiva que la anterior:

$$W \geq \phi Ql\lambda \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2}\right) = \gamma Ql\lambda$$

Ahora el coeficiente α corresponde a un factor de proporción —el cociente— entre el término constante de la cantidad de estructura y el producto de la carga por su distancia media al apoyo. En las vigas la primera de las magnitudes de dicho cociente es el área de cortantes resistida por la solución de alma, magnitud que coincide con la segunda de dicho cociente en los casos de dimensionado estricto.

Capítulo 9

Planos paralelos: soluciones adinteladas

Abordamos ahora el problema desde la perspectiva de las soluciones de problemas asociados a usos definidos, empezando por el caso de los espacios configurados mediante planos paralelos.

Las posibilidades explicativas que se deducen de este problema son de gran importancia, dado el escaso número de parámetros de que depende y el gran número de estructuras que responden a dicho modelo. Suponemos que se trata de soluciones de canto limitado, de ritmos regulares que se repiten de forma indefinida. Analizamos el caso de soluciones consistentes en familias de vigas paralelas. Para dicho problema se establecen las comprobaciones en forma geométrica, demostrando que resultan en comprobaciones de proporción, si la carga no incluye el peso propio, o de tamaño, si incluye éste. Se determinan, igualmente, los parámetros relevantes en el consumo de material necesario para asegurar el cumplimiento de los requisitos estructurales.

9.1. Resistencia y rigidez de soluciones de vigas paralelas

Vamos a establecer en primer lugar las condiciones de resistencia y de deformación limitada en el caso de vigas de sección constante para carga uniforme y peso propio, con el objetivo expreso de presentar tales condiciones, sobradamente conocidas, mediante relaciones geométricas. El problema ejemplifica buena parte de las cualidades geométricas del comportamiento estructural.

En Cortante, Flexión y Deformación, las expresiones de comprobación conocidas son del tipo:

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 \frac{(qs + bh\rho)l}{2} \leq \beta_1 \tau bh; \\ M &= \alpha_2 \frac{(qs + bh\rho)l^2}{8} \leq \beta_2 bh^2 \sigma; \\ \frac{\delta}{l} &= \alpha_3 \frac{(qs + bh\rho)l^4}{384EIl} \leq \beta_3; \end{aligned} \tag{9.1}$$

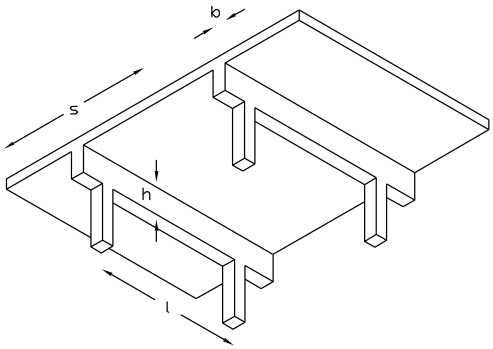


Figura 9.1: Geometría básica de una superficie soportada por vigas.

Con

q : Carga útil por unidad de superficie

l : Luz de la viga

s : separacion entre vigas (o luz de carga)

h : Canto de la viga

b : Ancho de la viga

ρ : peso específico del material

σ : Resistencia a tensión normal del material[1]

τ : Resistencia a tensión tangencial del material

E : Módulo de elasticidad del material

I : Inercia de la sección. ($bd^3/12$ en este diseño.)

α_1 : Factor por condición de extremo en el cortante (1 en condiciones simétricas)

α_2 : Factor por condición de extremo en el momento (1 en vigas apoyadas, 0,666 en empotradas elásticas, 0,5 en empotradas plásticas, ...)

α_3 : Factor por condición de extremo en deformacion (5 en vigas apoyadas, 3 en vigas con un extremo apoyado y el otro semiempotrado[2], 2 en vigas con ambos extremos semiempotrados, o bien uno apoyado y el otro perfectamente empotrado, 1 en vigas empotradas en ambos extremos...)

[1] En general en este desarrollo no distinguimos al hablar de resistencia entre σ —tensión (máxima) existente en algún punto de una sección dada— y f —resistencia a la tensión normal del material en dicho punto— dado que usualmente tratamos de condiciones de diseño para las que haremos coincidir la máxima tensión con la resistencia admisible en el material, y por ello empleamos un símbolo único.

[2] Por ejemplo cuando el valor del momento no alcanza al del empotramiento perfecto elástico, pero alcanza al menos el del momento negativo pastico de soluciones de sección simétrica y constante.

β_1 : Factor de resistencia de la sección en cortante (0,66 para las vigas rectangulares de comportamiento elástico, 0,9 para secciones de hormigón, ...)

β_2 : Factor de resistencia de la sección en flexión (0,1666 para vigas rectangulares de comportamiento elástico, 0,255 para secciones de hormigón con cuantía mecánica 0,3, 0,353 si la cuantía es de 0,45, ...)

β_3 : Incluye el límite de flecha admitido (1/400, ...) así como el denominador del término de inercia de la sección (1/12 en sección rectangular, ...).

Si ordenamos adecuadamente las expresiones anteriores, resulta

$$\frac{ls}{hb} \leq 2\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{\tau}{q}\frac{1}{\left(1+\frac{h\rho}{qs/b}\right)}$$
$$\frac{l^2 s}{h^2 b} \leq 8\frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{\sigma}{q}\frac{1}{\left(1+\frac{h\rho}{qs/b}\right)}$$
$$\frac{l^3 s}{h^3 b} \leq 384\frac{\beta_3}{\alpha_3}\frac{E}{q}\frac{1}{\left(1+\frac{h\rho}{qs/b}\right)}$$

Llamamos λ_b al cociente s/b, λ_h al cociente l/h; hacemos asimismo $\mu = \left(1+\frac{h\rho}{qs/b}\right)$; de este modo μq es la carga total, incluido el peso propio y μ vale la unidad más el cociente entre el peso propio y la carga externa.

De este modo resulta:

$$\begin{aligned} \lambda_h\lambda_b &\leq K_1\frac{\tau}{\mu q}; \\ \lambda_h^2\lambda_b &\leq K_2\frac{\sigma}{\mu q}; \\ \lambda_h^3\lambda_b &\leq K_3\frac{E}{\mu q}; \end{aligned} \tag{9.2}$$

Se trata de expresiones adimensionales en las que los cocientes del primer miembro son esbelteces —proporciones—, y los términos que intervienen en el segundo son en gran medida dependientes sólo del tipo de problema: En efecto, en K_i se consideran sólo términos del problema —forma de las cargas, condiciones de apoyo, ...— no dependientes de las dimensiones de la solución. En μ se incluyen todos los términos dependientes de la relación entre carga y peso propio, y puede considerarse como un **factor de ampliación de la carga** que multiplicaría a ésta para incorporar la influencia del peso propio[3]. Finalmente quedan los términos τ/q, σ/q, E/q, que denotan la relación entre las presiones que caracterizan la resistencia y rigidez del material, y la que caracteriza la intensidad de la carga, que no dependen tampoco de las dimensiones de la solución.

[3]El considerar la carga total —carga externa más peso propio— como una *ampliación* de la carga externa resultará extremadamente útil, como se verá más adelante, y como se intuye de lo expuesto en el capítulo 7.

9.1.1. Esbelteces base y límite

Entre las tres comprobaciones existen unos valores límite —que separan los puntos de corte entre diseño por cortante, diseño por momento, o diseño por deformación—, que se obtienen sin más que considerar que, en tales condiciones, la geometría cumple dos de tales condiciones simultáneamente, y ello depende sólo de la esbeltez en flexión de la pieza: λ_h. Si se expresa dicha simultaneidad puede obtenerse el valor de la esbeltez λ_h que corresponde a dicha condición por eliminación entre las dos ecuaciones, por ejemplo por cociente entre éstas. Se observa de inmediato que tales esbelteces no dependen de las relaciones entre carga externa y peso propio que puedan existir.

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \frac{K_2}{K_1}\frac{\sigma}{\tau}; \qquad \text{“Esbeltez } \textit{base}\text{, o esbeltez crítica a cortante”} \\ \lambda_l &= \frac{K_3}{K_2}\frac{E}{\sigma}; \qquad \text{“Esbeltez límite”} \end{aligned} \tag{9.3}$$

Hay que hacer constar que los anteriores conceptos, aun establecidos para un caso particular de proyecto, a saber, secciones homogéneas y rectangulares de un material isótropo, pueden igualmente establecerse para otras situaciones en las que, como hemos dicho al principio, puedan desligarse las decisiones sobre el canto de la estructura de las decisiones sobre su anchura y espesor. Por ejemplo, si consideramos vigas de hormigón armado, y analizamos el controvertido problema de la flecha, tenemos los siguientes pasos en la comprobación:

Determinación de la rigidez instantánea, que puede aproximarse con bastante precisión mediante la expresión $K = 0{,}7E_sA_sd^2$ que la refiere al área de acero de las secciones que representan de forma media a la pieza completa (el vano en las que tienen dos apoyos, y el apoyo en los voladizos). La expresión da cuenta de la rigidez fisurada de la sección con mejor ajuste que si se refiere a la rigidez bruta de hormigón.

Determinación de la flecha activa. La expresión re rigidez anterior oculta el efecto de la flecha diferida derivada de la fluencia del hormigón, pero es usual considerar ésta aproximadamente como una fracción, dependiente del tiempo, de la flecha instantánea total, por lo que no debería presentar problemas si la aproximación de la flecha instantánea es razonable

Comprobación. Bastará establecer, con las expresiones de la mecánica, la flecha o la relación flecha a luz.

Si hacemos lo descrito en los anteriores párrafos, y estimamos la flecha activa en un valor igual a la flecha instantánea para la carga total, que es una aproximación bastante usual, resulta

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{l}\frac{\alpha_1}{384}\frac{qsl^4}{K} = \frac{\alpha_1}{48}\frac{\frac{qsl^2}{8}l}{0{,}7E_sA_sd^2}$$
$$\frac{f}{l} = \frac{\alpha_1}{48}\frac{M_il}{0{,}7E_s\frac{\alpha_2M_i}{0{,}85d}d^2}$$

donde α_1 es un coeficiente que vale 1, 2, 3, 5 en piezas empotradas en ambos extremos, semiempotradas en ambos extremos o empotradas en uno de ellos,

semiempotradas en un extremo y apoyadas en el otro, o doblemente apoyadas, y siendo $A_s = \frac{\alpha_2 M_i}{z f_y} \approx \frac{\alpha_2 M_i}{0{,}85 d f_y}$ si se dimensiona la armadura de la sección de referencia para la fracción α_2 del momento isostático, en función de las condiciones de continuidad de la viga.

Si denotamos ahora $\frac{l}{d} = \lambda'$, resulta

$$\frac{f}{l} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\lambda'}{40 \frac{E_s}{f_s}}$$
$$\frac{f}{l} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\lambda'}{30000}$$

donde la ultima expresión es válida para acero BS500, y donde se comprueba que el requisito de flecha se alcanza por criterios de esbeltez si se usa toda la capacidad de resistencia del material. Esto muestra que la esbeltez límite puede establecerse por cualquier criterio aceptable, y, conocida la expresión adecuada para dimensionar las secciones por flexión —expresión que puede establecerse por procedimientos análogos a los empleados para la sección rectangular isótropa, pero aplicados a expresiones de la resistencia de piezas armadas con cuantías prefijadas— puede derivarse de ella y de la esbeltez límite la correspondiente expresión para dimensionar por razones de limitación de deformación, al obtenerse $K_3 = \lambda_l K_2 \frac{\sigma}{E} = \lambda_l K_2 \epsilon$. De igual modo puede establecerse la necesidad de sección para asegurar la capacidad resistente a cortante mediante las expresiones que limitan la compresión de las bielas en el hormigón, expresiones que imponen un límite mínimo a la sección requerida por cortante, obteniendo expresiones semejantes y dimensionalmente consistentes con las del caso isótropo. La conclusión es que las comprobaciones pueden formularse en formatos básicamente geométricos.

Veamos finalmente que para extraer en las expresiones de comprobación obtenidas sea la influencia de las cargas ajenas al peso propio, sea la de los pesos propios, podemos anular alternativamente el peso específico ρ o la carga externa q, obteniendo con ello las condiciones geométricas de diseño para vigas sin peso propio, o para vigas sin carga en el límite de tamaño.

9.1.2. Comprobaciones, bien sin peso propio, bien con sólo éste

En el primer caso $\mu = 1$, y en el segundo $\mu q = bhl\rho/ls$, es decir $1/\mu q = \lambda_s/h\rho$. De este modo, para estructuras sin peso propio las comprobaciones son:

$$\begin{aligned} \lambda_h \lambda_b &\leq K_1 \frac{\tau}{q} &= K_\tau; \\ \lambda_h^2 \lambda_b &\leq K_2 \frac{\sigma}{q} &= K_\sigma; \\ \lambda_h^3 \lambda_b &\leq K_3 \frac{E}{q} &= K_\delta; \end{aligned} \tag{9.4}$$

Como se ve se trata de estructuras en las que existe proporcionalidad entre las soluciones, dado que las condiciones de comprobación determinan la forma —canto, dimensionado— en términos de proporciones.

Para estructuras sin carga externa las expresiones pueden reescribirse en términos del tamaño de la estructura. Consideremos por ejemplo el caso de la

comprobación de flexión:

$$\lambda_h^2 \lambda_b \leq K_2 \frac{\sigma}{\mu q};$$

$$\lambda_h^2 \lambda_b \leq K_2 \frac{\sigma \lambda_b}{h\rho};$$

$$\lambda_h^2 l \leq \frac{l}{h} \frac{K_2}{\lambda_h} \frac{\sigma}{\rho};$$

resultando

$$l \leq \frac{K_2}{\lambda_h} \frac{\sigma}{\rho}$$

de modo que las expresiones pasan a ser las siguientes:

$$\begin{array}{lll} l \leq & K_1 \dfrac{\tau}{\rho} & ; \quad l \leq K_1 \dfrac{\tau}{\rho}; \\ l \leq & K_2 \dfrac{1}{\lambda_h} \dfrac{\sigma}{\rho} & ; \quad l\lambda_h \leq K_2 \dfrac{\sigma}{\rho}; \\ l \leq & K_3 \dfrac{1}{\lambda_h^2} \dfrac{E}{\rho} & ; \quad l\lambda_h^2 \leq K_3 \dfrac{E}{\rho} \end{array} \tag{9.5}$$

Resulta por lo tanto que l, la luz solución —el tamaño máximo alcanzable— sólo depende de la esbeltez geométrica de la pieza —de su proporción en alzado— y de otras condiciones, todas ellas ajenas al dimensionado, como se vio en el capítulo anterior.

Recordamos ahora el hecho fundamental de que, para dimensiones menores a la máxima, la fracción de la tensión empleada en soportar el peso propio es igual a la fracción entre la luz real de la pieza y la que corresponde a su tamaño máximo. En efecto, para dicho máximo, la tensión es la máxima admisible del material, y el tamaño alcanzado es proporcional a dicha tensión. Reducir la tensión admisible a una cierta fracción de aquélla implica reducir el tamaño posible a una fracción idéntica. De este modo, la proporción entre tamaños es igual a la que existe entre las tensiones requeridas para soportar el peso de la estructura.

Vemos reproducida la importantísima conclusión de que si conocemos el tamaño que no puede ser superado —teóricamente— por una solución estructural concreta, una estructura proporcional de tamaño menor tendrá una reserva de resistencia para resistir carga externa que podrá medirse por la proporción entre la dimensión que le falta a la estructura para alcanzar dicho tamaño máximo y éste mismo.

Es decir, si llamamos L, Alcance, a dicho tamaño máximo, y l al tamaño de la estructura considerada, y llamamos σ, σ_p, y σ_q respectivamente a la tensión de servicio del material, y a las partes de tensión empleadas en soportar el peso propio y la carga externa, resulta que como $\sigma = \sigma_p + \sigma_q$ se verifican las relaciones:

$$\frac{l}{L} = \frac{\sigma_p}{\sigma} = \frac{\sigma_p}{\sigma_p + \sigma_q} = \frac{1}{1 + \sigma_q/\sigma_p} = \frac{1}{\chi}$$

Consideremos ahora que tanto τ/ρ, como σ/ρ, o E/ρ son longitudes que dependen del material elegido, y que los demás términos en K_i dependen sólo del problema y del tipo de solución elegidos. Se comprenderá entonces el interés del análisis realizado: podemos abordar las comprobaciones de la viga, tanto si consideramos sólo la carga ajena al propio peso como si consideramos sólo

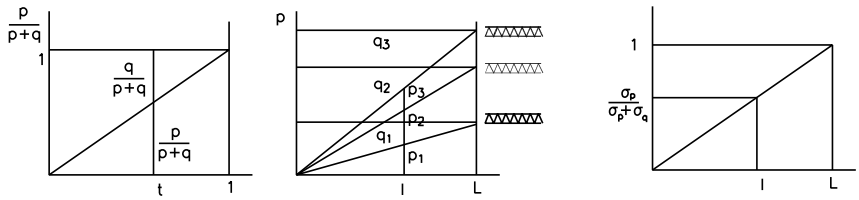


Figura 9.2: Relaciones entre tamaños y efectos del propio peso.

el peso propio, en términos geométricos, empleando por lo tanto términos de forma, a saber, esbeltez y tamaño.

Puede alegarse que no es posible describir desde la geometría el comportamiento de las estructuras que sólo resisten su propio peso y que han sido diseñadas estrictamente para tal función, al contrario del caso abordado aquí, de sección constante, y que por lo tanto constituye una restricción a las soluciones estructurales posibles, resultando ineficiente como solución para problemas de peso propio, y que, por lo tanto, no tiene por qué representar adecuadamente el problema de diseño para dicha clase, diferente, de problemas.

Más rigurosamente, el análisis realizado presupone que la carga externa es de **forma** análoga a la carga derivada del peso propio —se trata en este caso de dos casos de carga uniforme por unidad de longitud—, de modo que para casos en que no existe tal identidad de forma, el tipo de análisis empleado no es, en rigor, de aplicación. Sin embargo las conclusiones del análisis realizado pueden generalizarse con facilidad, por lo que su importancia no queda disminuida. Pueden verse más detalles en [Cervera, 1990].

Podemos recordar las expresiones que teníamos en el apartado 7.5, deslindando en éstas los cuatro términos fundamentales de la forma: ESQUEMA, ESBELTEZ, TAMAÑO y DIMENSIONADO. A éstos términos se añaden en las comprobaciones de las soluciones reales los términos derivados del material empleado, y de la relación entre sus características y las de las cargas externas aplicadas.

En efecto, al plantear las expresiones de comprobación en términos geométricos para las vigas de sección rectangular obtuvimos las 9.2 para comprobaciones por cortante, momento, y deformación limitada, que representan comprobaciones en campos cuyos límites de validez se sitúan en las esbelteces de la expresión 9.3.

Tales expresiones se aplican a piezas sin peso propio, sin más que hacer el factor μ igual a uno, y a piezas con peso propio considerando en μ el factor de ampliación de carga derivado de las expresiones del tamaño relativo al alcance o tamaño insuperable. Para piezas sometidas a peso en el límite de tamaño obteníamos las ecuaciones 9.5.

Como resultado del análisis de los apartados anteriores somos ahora capaces de delimitar lo que suponen en tales expresiones cada uno de los componentes de la forma descritos, para lo que reescribimos las citadas ecuaciones conjunta-

mente, observando los términos que en ella aparecen.

$$\begin{array}{llll} \lambda_h\lambda_b & \leq K_1\dfrac{\tau}{q} & = K_\tau; & l \leq \quad K_1\dfrac{\tau}{\rho} \quad = L_\tau \\ \lambda_h^2\lambda_b & \leq K_2\dfrac{\sigma}{q} & = K_\sigma; & l \leq \quad K_2\dfrac{1}{\lambda_h}\dfrac{\sigma}{\rho} \quad = L_\sigma \\ \lambda_h^3\lambda_b & \leq K_3\dfrac{E}{q} & = K_\delta; & l \leq \quad K_3\dfrac{1}{\lambda_h^2}\dfrac{E}{\rho} \quad = L_\delta \end{array}$$

Es evidente el significado del *esquema*, cuya *eficiencia* viene representada en las fórmulas por los coeficientes K_i, así como el de *tamaño* que viene representado por la luz l, o el de *tamaño relativo*, representado por el cociente $\frac{l}{L}$, siendo L el tamaño insuperable o *alcance*.

De las proporciones contenidas en λ_h y λ_b cabe señalar que el alcance no depende de esta última, y si consideramos que el único término de la forma del que no depende el tamaño máximo es el *dimensionado*, puede afirmarse que λ_h expresa la *esbeltez* o proporción básica del diseño, la del rectángulo que circunscribe la solución, mientras que λ_b aporta una forma de expresar el *dimensionado*.

Podemos escribir las expresiones en forma diferente, de modo que se perciba inmediatamente el hecho intuitivo de que, tanto una mayor relación de resistencia a carga, como un mayor dimensionado, como una mayor eficiencia en el esquema elegido para componer la solución, permiten alcanzar piezas más esbeltas:

$$\begin{aligned} \lambda_h &\leq K_1\frac{1}{\lambda_b}\frac{\tau}{\mu q} \\ \lambda_h^2 &\leq K_2\frac{1}{\lambda_b}\frac{\sigma}{\mu q}; \\ \lambda_h^3 &\leq K_3\frac{1}{\lambda_b}\frac{E}{\mu q}; \end{aligned}$$

En tales expresiones, $D = \dfrac{1}{\lambda_b} = \dfrac{b}{s}$ es el término que define el *dimensionado*. Para comprender su significado geométrico consideremos que, una vez definido el canto h —a partir de luz l y la esbeltez λ_h—, la separación entre pórticos s multiplicada por h describe el área máxima que puede ser ocupada por la viga. Puede entonces definirse el dimensionado $D = \dfrac{b}{s}$ —que es igual a $\dfrac{bh}{sh}$— como la fracción de área posible para su ocupación por la viga que es efectivamente utilizada por ésta.

Para comprobar tal significado geométrico, consideremos el problema de flexión resuelto mediante una viga triangulada apoyada de cordones de sección constante y montantes y diagonales también de sección constante. Para simplificar la digresión no consideraremos los efectos del pandeo.

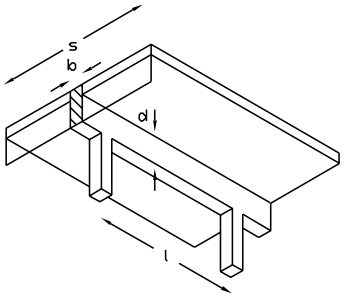


Figura 9.3: Dimensionado en viga de sección rectangular.

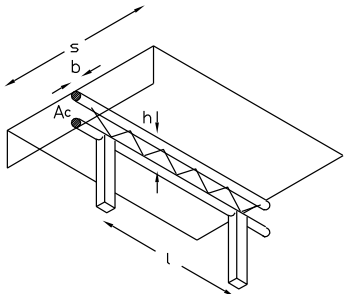


Figura 9.4: Dimensionado en viga de celosía.

Si analizamos la resistencia de la viga en flexión, resultará:

$$\frac{\big(qs + (A_c + \frac{A_m}{\cos\alpha})\rho\big)l^2}{8} \leq \frac{A_c}{2}\sigma z$$

$$l^2 \leq \frac{8}{2}\frac{A_c}{\big(qs + (A_c + \frac{A_m}{\cos\alpha})\rho\big)}\sigma h$$

$$l^2 \leq 4\frac{A_c}{hs}\frac{\sigma}{q\big(1 + (A_c + \frac{A_m}{\cos\alpha})\frac{\rho}{qs}\big)}h^2$$

$$\lambda_h^2 \leq 4\frac{A_c}{hs}\frac{\sigma}{\mu q}$$

expresiones en las que se ha identificado aproximadamante z —brazo de palanca entre cordones— con h —canto—.

En la última expresión se reconocen de inmediato los términos ya descritos de *esbeltez*, *esquema*, *dimensionado*, así como la *ampliación de carga* derivada del *tamaño relativo*, resultando como último término de la misma el cociente σ/q —o $\sigma/\mu q$ si se considera el peso propio— que expresa la relación entre las intensidades de presión correspondientes a la resistencia del material y a la carga.

Las anteriores consideraciones establecen una interesante precisión sobre el objeto estructural de la propiedad definida como *dimensionado*, espesor, o grosos, que no es otra que aportar la capacidad para resistir las cargas existentes aprovechando el margen de resistencia que se deriva de usar tamaños menores

que el insuperable. Si se evalúa dicha propiedad en el caso de la viga de sección rectangular constante, obtenemos $D = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{b}{s}$. Se trata de una magnitud derivada, de modo que una vez fijado el tamaño l y la esbeltez en alzado λ_l, D se determina por la proporción del ancho disponible entre ejes de vigas que se utiliza efectivamente para disponer la viga, con límite máximo en la unidad, es decir, con el límite máximo —en la solución de losa— de que la viga ocupe efectivamente todo el espacio disponible. En otros tipos constructivos puede establecerse una expresión similar, de modo que siempre puede establecerse un límite máximo para dicho dimensionado que, por lo tanto, fuerza un límite máximo a la esbeltez que puede adoptar el tipo estructural elegido, límite que podemos llamar "Esbeltez tope", y que en el caso analizado se determina haciendo $D = 1$

$$\lambda_p \leq \sqrt[3]{K_3 \frac{E}{\mu q}} \tag{9.6}$$

De este modo tenemos tres regiones de comprobación, dependientes de forma diferente de la esbeltez, y tres límites en ésta que suponen el límite de empleo de cada una de las regiones para determinar las dimensiones de la pieza, de modo que si la esbeltez supera dicho valor límite, deberá usarse para el dimensionado la región siguiente. El último de los límites resulta ser un valor de esbeltez que no puede ser superado de forma alguna en las condiciones de diseño establecidas.

9.2. Coste de las soluciones adinteladas

Una exploración necesaria si pretendemos considerar la eficiencia relativa de las soluciones elegidas es la del coste o volumen material necesario para resolver un problema estructural dado.

Si consideramos que hemos de comparar soluciones de diferentes dimensiones, tanto en el módulo $l \times s$ soportado, como en las dimensiones $h \times b$ establecidas para resolverlo, resulta evidente que la medida de comparación deberá ser la de coste o volumen unitario, es decir, el volumen de material por unidad de superficie —y de carga— soportado.

Así pues

$$V_u = \frac{V}{ls} = \frac{lhb}{ls} = \frac{l}{\lambda_h \lambda_b}$$

De este modo, para cada una de las regiones de diseño prefijadas en el apartado anterior resultará un volumen unitario diferente, que depende de la luz, pero depende crecientemente de la esbeltez según aumenta ésta, hasta depender cuadráticamente de la misma cuando el dimensionado está regido por deformación.

$$\begin{array}{llll} \text{cortante;} & \lambda_h \lambda_b & \leq K_1 \frac{\tau}{\mu q} & = K_\tau; \quad V_u = \frac{l}{K_\tau} \\ \text{momento;} & \lambda_h^2 \lambda_b & \leq K_2 \frac{\sigma}{\mu q} & = K_\sigma; \quad V_u = \frac{l \lambda_h}{K_\sigma} \\ \text{deformación;} & \lambda_h^3 \lambda_b & \leq K_3 \frac{E}{\mu q} & = K_\delta; \quad V_u = \frac{l \lambda_h^2}{K_\delta}. \end{array} \tag{9.7}$$

Cuando el dimensionado es por cortante, el coste no depende básicamente de la esbeltez, pero una vez superada la esbeltez base, que es baja, y por lo tanto una vez que el dimensionado se decide por momento, el coste crece linealmente con la esbeltez, pasando a crecer cuadráticamente con ella tras superarse la esbeltez límite, y sin que pueda de ninguna manera superarse la esbeltez tope.

Capítulo 10

Cubiertas: soluciones curvas.

10.1. Soluciones: transiciones entre formas alternativas

La enorme diversidad de tipos que puede usarse en cubiertas, en contraste con la escasa diponibilidad en los problemas de estructuras de pisos paralelos deriva de las propias características del problema arquitectónico a resolver: basta asegurar que la proyección de la forma cubre la planta, junto con algunos pocos requisitos más que no suponen grandes restricciones formales usualmente, como son la posibilidad de evacuación de aguas, la iluminación del recinto, etc. Pero además, y como hemos visto en los apartados anteriores e ilustraremos en las figuras que siguen, las distintas opciones formales, consideradas y resueltas rigurosamente, no tienen por qué suponer muy distintas eficiencias en su comportamiento, por lo que son básicamente intercambiables entre sí. De este modo las cubiertas han dado origen a un extenso repertorio de soluciones, que pueden emplearse en sus múltiples variantes para materializar formas e imágenes muy diversas.

Hay que considerar además que la incidencia espacial de las formas necesarias para cubrir espacios es proporcional al espacio cubierto. Más aún, si para espacios grandes se trata de limitar la inversión estructural requerida, por su mayor peso en la inversión final, se incrementa más aún la incidencia espacial al necesitarse limitar la esbeltez. De este modo el contenido simbólico asociado a las distintas edificaciones utilizadas por el poder —terrenal o celestial— puede transferirse de inmediato a la forma que lo cubre.

La cubierta puede así configurarse como uno de los elementos simbólicos privilegiados en la arquitectura. La opción por una u otra configuración no es sólo una opción intrínseca que deriva de los requisitos internos de la propia edificación y sus leyes físicas propias, sino que al ser las soluciones posibles bastante intercambiables, admite en sí la adición de elementos de significación ajenos a su propias cualidades portantes, ajenos por tanto a su propio valor semántico como elemento arquitectónico implicado en el establecimiento de la *firmitas* de la obra.

Esta cualidad simbólica de las grandes cubiertas ha sido una constante de la arquitectura, aun cuando la extrema diversidad de soluciones formales sea sólo una realidad reciente, puesto que requiere del uso de materiales eficaces tanto en tracción como en compresión para alcanzar toda su virtualidad. En las edificaciones del pasado dicha diversidad quedaba parcialmente limitada al quedar restringida por las capacidades de los materiales compresibles —fábricas—, o a las posibilidades de ensamblaje de la madera.

Para hacer el recorrido formal consideraremos como referencia uno de los dos problemas clásicos de resistencia de materiales desde Galileo: el cruce de un vano con soluciones biapoyadas. (El otro es el voladizo). Se consideran sucesivamente diferentes versiones de la forma apoyada en dos extemos del recinto, sus variantes cuando el apoyo se lleva al contorno completo del recinto, y las alternativas que se deducen de las reglas de transformación vistas en anteriores apartados, a saber la regla de identidad *anillo-radios-malla* —que aporta cambios de geometría en planta— o la transformación *de viga en arco* —con cambios en el alzado—. Vimos en el apartado 7.2.1 que la primera, representada en la figura 7.4, era un importantísimo corolario del teorema de Maxwell. Hemos podido comprobar también, en el apartado 8.4, que la segunda de estas transformaciones no supone diferencias muy importantes en la cantidad de estructura, a igualdad en las condiciones de idoneidad en el apoyo y de continuidad, por lo que ambas transformaciones son operaciones legítimas si pretendemos recorrer formas estructurales comparables en eficiencia. El recorrido que aquí presentamos es por ello esencialmente cualitativo, basado en las ideas construidas en los anteriores capítulos.

10.1.1. Viga

La solución de viga, en el caso de cubiertas, puede ser de sección maciza —caso de la madera— o aligerada, por triangulación o refuerzo, y en dimensiones pequeñas y medias es insustituible. La viga debe desdoblarse para reducir la dimensión transversal, y las separaciones entre vigas tratan en general de minimizar los costes de las siguientes familias, situándose en un rango difuso entre 1/3 de la luz y 2 metros más 1/8 de la luz.

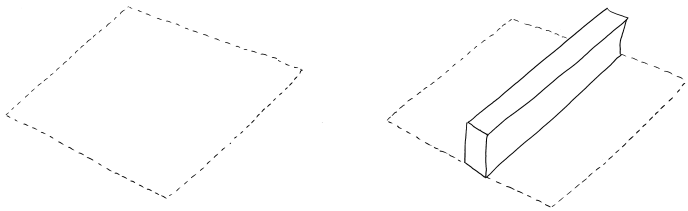


Figura 10.1: Problema de cubierta ... resuelto con vigas ...

Las soluciones de viga pueden aprovechar la continuidad, reduciendo el área de momentos si es posible colocar soportes en el interior, lo que debe hacerse siempre que el uso lo permita.

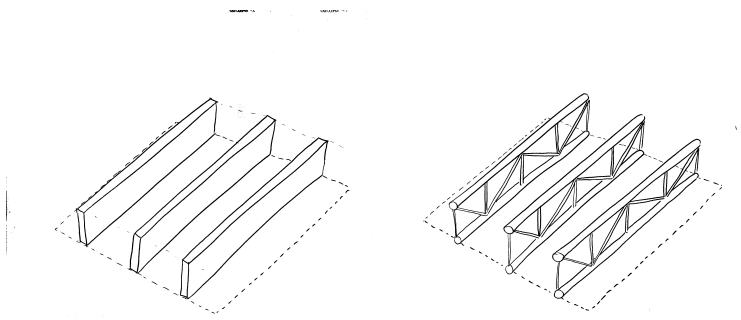


Figura 10.2: Vigas separadas . . . y triangulades

10.1.2. Emparrillado

El desdoblamiento de las vigas y su cambio de dirección da lugar al emparrillado que, a igualdad de otras características, tiene un coste teórico levemente menor —dado que la proximidad de las cargas al apoyo mejora. La reducción se asocia al factor de dicha mejora, que pasa a ser cercano —aunque mayor— a 1/6, frente al 1/4 de la solución precedente, a cambio de mayor complejidad y dificultad constructiva, en particular en lo que se refiere a la necesaria continuidad de los cordones traccionados.

Hay ventaja adicional en la reducción del problema de pandeo del cordón comprimido, y las soluciones que resuelven el cerramiento de la superficie mediante elementos cuadrados concuerdan razonablemente con el tipo, adecuado por tanto para soportar paños de vidrio.

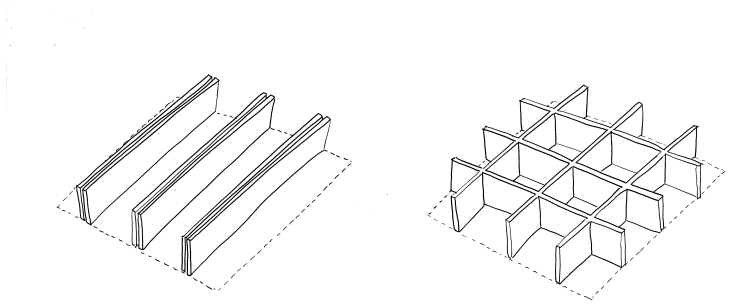


Figura 10.3: Desdoblando vigas . . . para obtener emparrillados.

La solución triangulada es sin excepción la malla estérea de pirámides cuadradas al objeto de reducir los tipos de nudos distintos del entramado.

El comportamiento de emparrillado podría hacerse más complejo: pasando a la malla de tetraedros tendríamos comportamiento de placa, es decir, con rigidez a torsión. Sin embargo este cambio no aporta mejora práctica alguna frente al emparrillado, exigiendo a cambio una complejidad en los nudos muy superior, por lo que no se trata de una solución usual.

En todo caso, cabe añadir que, tanto la viga como el emparrillado se emplean con regularidad como elementos estructurales de segundo nivel en muchas soluciones que globalmente son de otro tipo, como elementos de rigidización (malla

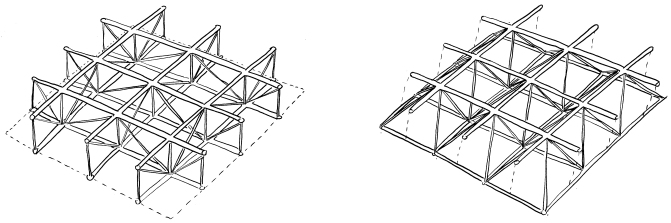


Figura 10.4: La sencillez sugiere triangular en mallas de pirámide cuadrada.

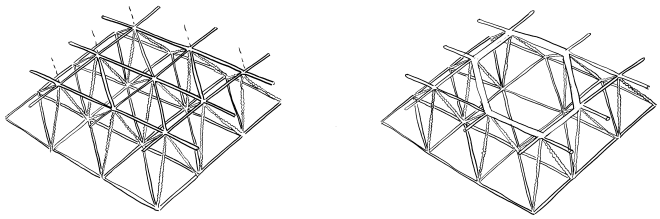


Figura 10.5: Malla de tetraedros . . . con empleo de anillos para abrir huecos

de pirámides cuadradas para producir la doble capa en bóvedas y cúpulas o vigas como segunda o tercera familia estructural en soluciones de todo tipo).

10.1.3. Arcos paralelos. Bóvedas

La alternativa de dar canto variable a las vigas nos traslada a las soluciones en arco, tras pasar por las piezas de canto variable pero de forma no funicular, es decir, las cerchas. En la medida en que la forma se acerca a la antifunicular de las cargas dominantes, las necesidades de resistir flexiones, bien en la forma global, bien mediante flexión local en el cordón cargado, se reducen.

De todos modos, tanto las alternancias de carga en el cordón cargado, como las necesidades de rigidez en el cordón comprimido exigen rigidez, que puede obtenerse con secciones aligeradas, o trianguladas.

Las diferencias entre los costes globales de una y otra solución pueden entenderse considerando, al igual que en casos anteriores, que las mejoras que pueden producirse —siempre para esbelteces bajas, pues en caso de esbelteces altas siempre serán más eficaces las soluciones precedentes— exigen a cambio una complejidad constructiva mayor, si bien ahora la estructura pasa a suponer una obstrucción espacial mucho menor.

Las soluciones de arcos paralelos sea cuales sean las secciones con que éstos se resuelven, incluyendo a las bóvedas, corresponden a una misma familia, con las solas diferencias en las formas de sección empleada y en las separaciones entre arcos.

Las soluciones de arco, invertidas, dan lugar a las catenarias, con la dificul-

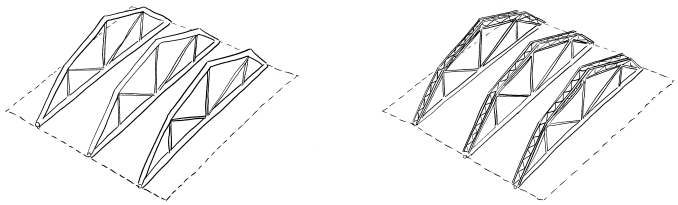


Figura 10.6: Cerchas . . . con cordón superior rigidizado si es preciso.

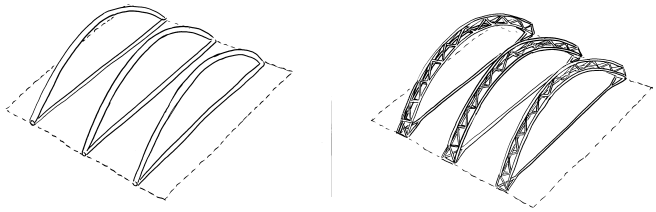


Figura 10.7: Arcos

tad de haber subido el punto de arranque de la estructura y necesitar establecer el cordón comprimido que soporta el empuje por encima de la superficie cargada, o, alternativamente, requiriendo disponer de elementos verticales u oblicuos sometidos a fuertes cargas horizontales.

10.1.4. Arcos cruzados.

El paso al comportamiento bidireccional, en la misma forma en que se lograba en vigas, puede acometerse con canto variable, en arcos, pero ahora la restricción de mantener los cordones a la misma cota en los puntos de cruce obliga a modificar el contorno del apoyo, pasando a formas poligonales o curvas, en las que la más sencilla será la circunferencia para cubrir superficies circulares.

Ahora bien, a partir de esta solución, la malla de tirantes puede ser sustituida por un anillo, que será en gran medida equivalente a la malla precedente para las cargas predominantes, si bien deberá soportar las flexiones derivadas, en los casos de carga alternante, de las diferencias de regularidad en los empujes radiales que resultan. Igualmente a los casos anteriores, la rigidez del arco puede exigir secciones que convenga aligerar mediante una triangulación local.

Pero además ahora puede considerarse la posibilidad de invertir las dos familias de arcos para crear una malla de cables cargada contra un anillo en compresión, solución de escasa rigidez, o invertir sólo una de ellas y crear una familia de arcos compartiendo carga con una familia de catenarias. Si además consideramos el empleo de materiales de alta resistencia en tracción, la solución

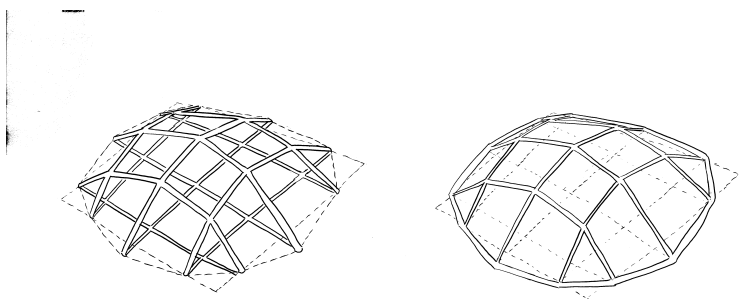


Figura 10.8: Arcos cruzados: la malla de tirantes se transforma en anillo.

deriva rápidamente a otra en la que la familia de catenarias —aquella en la que la cara convexa es la inferior— se responsabilizará de soportar toda la carga gravitatoria, y la familia que inicialmente era de arcos —la convexidad está en la cara superior— se empleará para tensar a la anterior, sosteniendo adicionalmente las cargas invertidas, por succión de viento, que pudiesen superar el efecto de las gravitatorias.

En esta geometría, el *anillo* exterior se transforma en un arco inclinado sometido a cargas en la dirección de la superficie de cerramiento, cargas que son transversales a la directriz del arco en la clave, y que se acercan progresivamente a la tangente a dicha directriz en las cotas inferiores. Este arco, en general, tendrá puntos de apoyo o tirantes en su proyección vertical, pero lleva la parte básica de su carga a sus puntos de apoyo, que se han solucionado en los ejemplos construidos con variantes diversas, siempre con una importante menor eficiencia general a la de las familias anteriores al haberse alejado seriamente las cargas de los puntos finales de apoyo en la cimentación.

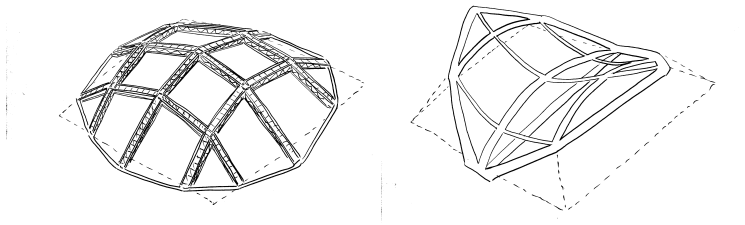


Figura 10.9: Arcos cruzados

10.1.5. Arcos radiales. Anillos y cúpulas.

En el apartado 7.2.1 hemos hecho mención de las poderosas reglas de transformación formal que el teorema de Maxwell permite emplear, y que hemos aplicado en el apartado anterior para eliminar los tirantes cruzados y sustituirlos por un anillo. Si aplicamos tales reglas al cordón comprimido de la estructura generamos familias estructurales nuevas: basta pensar en sustituir los arcos cru-

zados por arcos radiales, para, con la misma eficiencia, obtener una solución que constructivamente es más regular, salvo en el punto singular en que se cruzan tales arcos. Dichos arcos pueden requerir igualmente su rigidización local, lo que complica aún más el encuentro en el punto único de cruce que configura la clave.

Dicho punto singular, de imposible factura, se resuelve sustituyendo localmente los arcos convergentes por un anillo de compresión —la solución clásica en las construcciones históricas de piedra consiste en un macizo que funciona como disco comprimido biaxialmente—de modo que se resuelve el encuentro de los n medios arcos por n encuentros iguales al anillo central, que puede ser de las dimensiones requeridas para facilitar la unión.

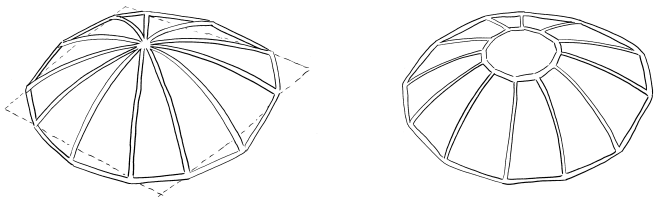


Figura 10.10: Arcos radiales.

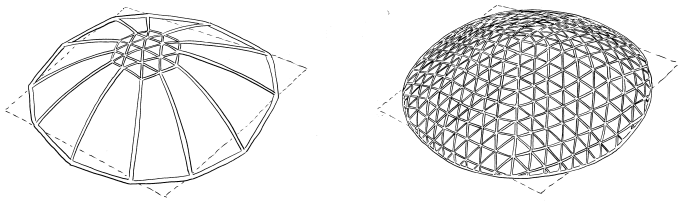


Figura 10.11: Arcos radiales: transición a la cúpula

Pero ese anillo puede igualmente ser sustituido por una malla superficial, y una vez iniciado ese camino, proceder a extender la malla a toda la superficie que cubre la solución, dando origen a las cúpulas.

Las cúpulas aportan ahora una variante de altísima importancia, al añadir anillos a lo largo de toda la altura: ahora la forma puede ser rígida si lo es la forma del apoyo, de modo que se necesitan dimensiones mayores para forzar el salto de complejidad que supondría desdoblar las barras individuales en piezas compuestas, siendo usual que el siguiente salto en complejidad venga definido por la necesidad de rigidez conjunta de regiones amplias de la superficie envolvente, lo que exigirá pasar a soluciones de doble (en casos extremos de triple) capa. En este caso las dos capas son en la mayor parte de los casos las caras de una solución que localmente es análoga a los emparrillados o mallas de pirámide cuadrada.

10.1.6. Cerchas radiales. Soluciones híbridas.

Al igual que hemos transformado las mallas de arcos en arcos radiales, podemos tranformar las mallas de vigas, los emparrillados, en vigas radiales, que resolverán el problema del punto singular en el centro mediante un cilindro que combina los anillos de compresión y tracción de los cordones sustituidos en dicho punto, más el alma que los conecta capaz de transferir carga en los casos de no simetría de éstas. Cabe añadir que los cordones en cada anillo requieren rigidez a flexión en su plano para ciertos casos de asimetría.

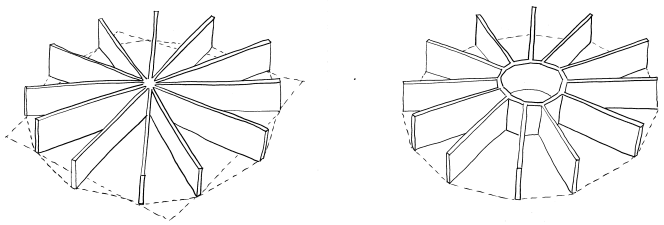


Figura 10.12: Vigas radiales.

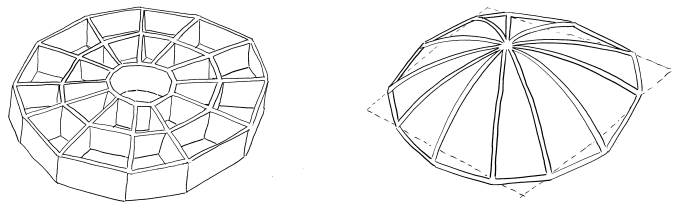


Figura 10.13: Transformaciones posibles de las vigas radiales.

Pueden sustituirse, sin pérdida de eficiencia, parte de los esfuerzos radiales de los cordones comprimido y traccionado por esfuerzos en anillos intermedios, dando lugar a soluciones con mayor número de piezas y de eficacia análoga, pero más adecuadas por su mayor densidad a las situaciones que requieren dimensionados mayores, aplicables por tanto a las soluciones con canto limitado.

10.1.7. Catenarias

La otra alternativa de forma es cambiar la forma de los cordones. Puesto que ya vimos el caso de los cordones comprimidos curvos, los arcos radiales, curvamos el cordón traccionado y tenemos las soluciones de catenaria radial, en las que muy a menudo el anillo central interior es de gran tamaño, dejando abierta una fracción muy importante de la superficie cubierta. Si unimos, finalmente, arcos y catenarias, tendremos el origen de las soluciones lenticulares, en las

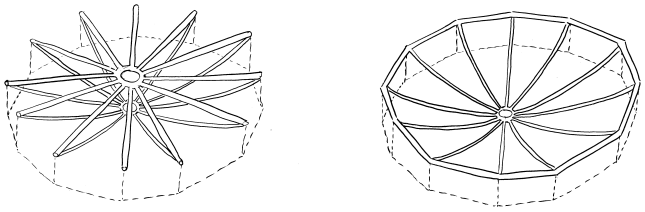


Figura 10.14: Catenarias radiales, ... mejor con anillo.

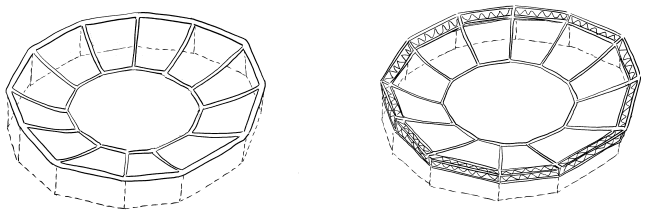


Figura 10.15: Los anillos en compresión se rigidizan.

que, nuevamente, podríamos considerar que el empleo de materiales de alta resistencia en tracción permite trasladar la totalidad de la carga a las catenarias, transformando la familia de arcos en una estructura destinada a tensar a la anterior, que por tanto invierte su sentido de trabajo y pasa a estar también traccionada a expensas de mayores esfuerzos en el anillo de compresión. Ahora el elemento de conexión entre las dos familias puede ser un fluido si se logra un espacio estanco entre ambas familias, con lo que llegamos a las soluciones lenticulares hinchadas.

10.1.8. Conclusiones

Los conceptos establecido en el recorrido realizado, aun con las limitaciones con que han sido aplicados aquí, han mostrado su interés, y su elevado potencial para facilitar la reflexión en profundidad sobre las opciones diponibles a la hora de proyectar.

En dicho recorrido hemos comprobado además que las soluciones formales de las estructuras de cubierta son muy variadas, con eficiencias comparables siempre que pueda recurrirse a materiales resistentes tanto en tracción como en compresión. Por ello la atribución de sentido estructural a la forma no requiere ya de un repertorio limitado de éstas como sucedía en el pasado. Sólo exige acotar en márgenes (ciertamente amplios) a un pequeño número de parámetros abstractos de la forma. Forma y eficacia resistente dejan, pues, de tener asociaciones perceptivas simples haciendo inevitable la disociación, en el terreno de la estabilidad, entre el papel semántico y el simbólico de las formas. Po-

drán ahora atribuirse referentes simbólicos cualesquiera a formas muy diversas. En tanto no se limiten las alternativas disponibles por requisitsos originados en otros campos —acondicionamiento, industrialización— los discursos basados en la fragmentación, la diversidad, la autoría, etc. estarán, pues, justificados aunque sin legitimidad para operar arbitrariamente.

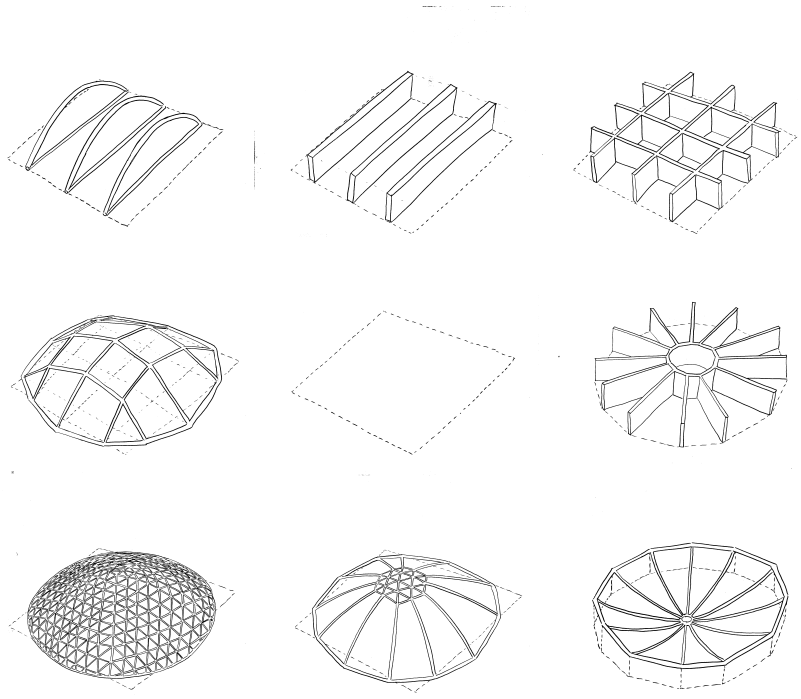


Figura 10.16: Soluciones alternativas al mismo problema

Capítulo 11

Geometría y estructura. Conclusiones

El recorrido realizado en este texto ha pretendido

- describir los principios básicos del análisis estructural,
- caracterizar el modo de comportamiento de elementos estructurales básicos,
- cuantificar el consumo o inversión requeridos para resolver problemas estructurales comunes,
- comparar la eficiencia de soluciones estructurales alternativas,

y todo ello nos ha permitido recorrer formas alternativas para resolver un mismo problema con conocimiento y control suficiente sobre las repercusiones de las alteraciones realizadas al pasar de unas soluciones a otras.

En dicho recorrido se ha podido establecer un importante cúmulo de información relevante en los procesos de proyecto de la forma estructural, que podemos catalogar en varios apartados

11.0.9. Análisis

- Las condiciones de equilibrio, compatibilidad y rigidez son necesarias y suficientes para resolver cualquier problema estructural que no sea estrictamente isostático, aun cuando su formulación resulta diferente en los enfoques elástico o plástico.
- El principio de los trabajos virtuales proporciona una poderosa herramienta para la descripción y manipulación de estados equilibrados o compatibles, apta en cualquier método de análisis.
- Los principios del análisis plástico garantizan la seguridad de las soluciones aun cuando las relaciones de rigidez empleadas sean imprecisas o incorrectas, siempre que estén suficientemente garantizados el equilibrio, la estabilidad y la ductilidad

- Los problemas continuos pueden reformularse mediante las técnicas de discretización empleadas por el MEF; dichas técnicas son aplicables a clases más extensas de problemas que las del análisis elástico: las hemos visto en el contexto de problemas de optimización, e igualmente pueden aplicarse a la formulación y resolución de problemas de análisis plástico.
- Con las actuales herramientas de cálculo, los procedimientos de análisis elástico aseguran soluciones fáciles de obtener, equilibradas, compatibles, y apropiadas a las relaciones de rigidez o tenso-deformacionales elegidas. Son de desear y obtenibles a corto plazo instrumentos análogos basados en el análisis plástico.
- Con todo ello, las posibilidades que proporciona el análisis son de envergadura suficiente para abordar casi cualquier problema concebible, aunque el coste del análisis puede ser de cierta importancia, por lo que ya es relevante establecer una fase previa al análisis que reflexione sobre la pertinencia y utilidad del análisis mismo.

11.0.10. Proyecto

- La forma estructural tiene relevancia fundamental en el comportamiento de la estructura, considerando como parte de dicha forma tanto la disposición de los elementos de la estructura como la disposición de las cargas.
- Es posible caracterizar los parámetros de la forma de mayor relevancia para asegurar la idoneidad de las estructuras.
- Los parámetros básicos son independientes de la forma adoptada por la estructura, en el sentido de que importantes cambios en la forma estructural que no alteren estos parámetros, y siempre que no se incurra en errores apreciables para la forma elegida, no suponen cambios apreciables en la eficiencia o la idoneidad estructural.
- La forma puede suponer esencialmente un factor de sobrecoste o de ineficiencia importante en la medida en que adopte configuraciones alejadas de las establecidas como buenas para los parámetros básicos

Hemos visto que los parámetros básicos del coste, que se deducen de las expresiones de la cantidad de estructura y de las que caracterizan el tamaño máximo de una estructura eran

Tamaño Dimensión, o luz del problema. La luz de referencia de la estructura. Se trata de la menor distancia entre las regiones de apoyo empleadas. El coste es directamente proporcional a la luz, y, en problemas en los que el tamaño es relevante, una magnitud básica resulta ser la relación entre dicho tamaño y el máximo alcanzable por la estructura sometida a su peso, para cada material considerado, relación que se identifica con la fracción de resistencia consumida inevitablemente para sostener dicho peso.

Proporción Esbeltez, relación luz-canto, proporción del recuadro rectangular que circunscribe la geometría de la solución, vista en alzado. El coste estructural depende íntimamente de dicha magnitud, siendo casi directamente proporcional a ella cuado su valor es alto.

Esquema Características geométricas, del tipo de solución adoptado, del tipo estructural. Contiene como componentes esenciales

- La forma de la carga, caracterizada por su distancia media al apoyo, de modo que el coste es proporcional a la fracción de dicha distancia a la luz.
- La forma general de la estructura, caracterizada por la existencia o no de traslado de carga transversal por uno o los dos sistemas de cordones que equilibran el par global de flexión, de modo que el empleo de dos cordones supone una ventaja respecto al empleo de uno solo cuantificable en la magnitud $\sqrt{2}$ cuando se cuenta con simetría respecto de la horizontal, y traslado de carga mediante ambos cordones.
- La forma del apoyo, caracterizado por el ángulo que forman entre sí los elementos traccionados con los comprimidos, en las proximidades de éste, de modo que los ángulos de 90º caracterizan los óptimos, con sobrecostes importantes para ángulos menores, que pueden estimarse mediante las esbelteces implícitas en tipos de análogo ángulo de arranque.
- Las condiciones de continuidad de la pieza, que permiten alternar globalmente regiones con momentos globales positivos y negativos, y que pueden cuantificarse mediante la comparación de las áreas de momentos de soluciones en competencia.

Dimensionado o espesor o grosor de la solución estructural, requerido para soportar las cargas adicionales al propio peso de la estructura. No tiene relevancia para el establecimiento del tamaño de la estructura insuperable, pero resulta básico para soportar las cargas necesarias, siendo proporcional para cada tamaño a las cargas que se añaden a las del propio peso estructural.

Con todo lo anterior queda mostrado el interés y viabilidad de muchos de los objetivos formulados en la introducción a este texto, y las posibilidades que su más extensa exploración pueden aportar en el futuro para iluminar la labor del proyecto de estructuras.

Apéndice A

Soluciones a los problemas

A.1. Problemas elásticos

Las soluciones anunciadas en el apartado 4.1.5 son las siguientes.

Para la viga continua se muestran los valores de la solución para valores unitarios de la inercia y del módulo de elasticidad, obtenida mediante la hoja de cálculo de OpenOffice, en su antigua versión 1.1.1; en ella se sombrean las diferentes matrices. Algunas de las operaciones, como la obtención de los desplazamientos, corresponden a varias operaciones matriciales: en ésta por ejemplo a la multiplicación de la matriz de cargas $\boldsymbol{F}$ por la inversa de la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$, inversa cuyo valor no se muestra explícitamente en la hoja.

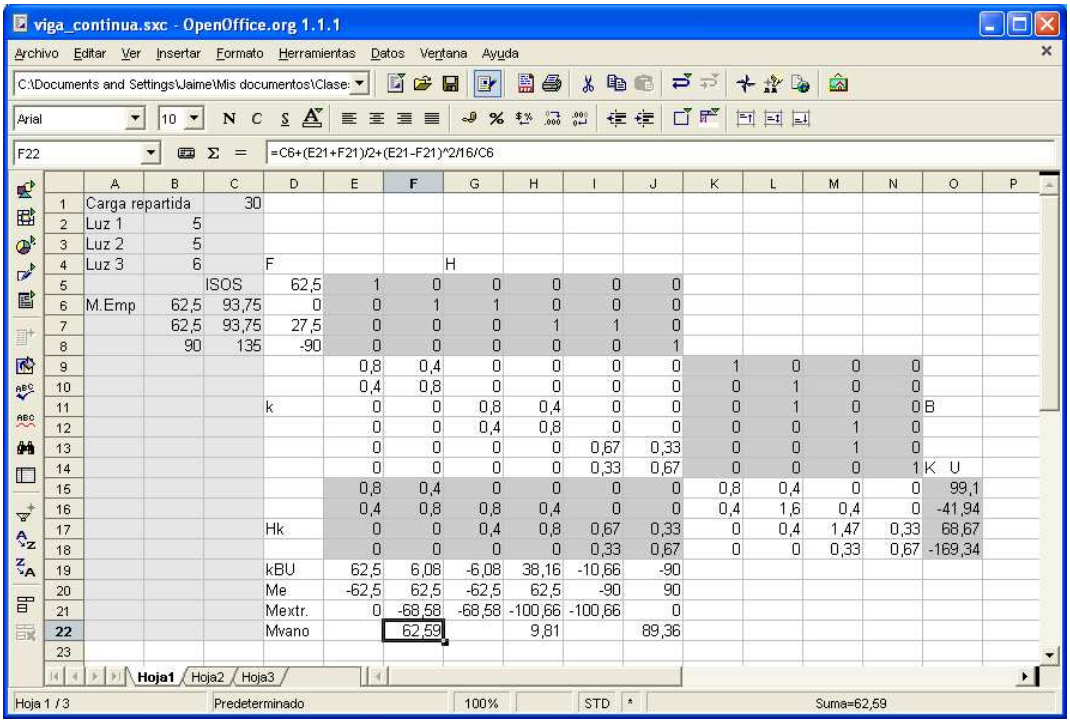
Para la estructura de cables, las matrices de equilibrio, rigidez de barras y de estructura completa, y de relación entre esfuerzos y cargas son las siguientes:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0,6428 \\ 0,866 & 1 & 0,766 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \frac{EA}{l_2} \begin{bmatrix} 0,866 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,766 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \frac{EA}{l_2} \begin{bmatrix} 0,53300 & 0,0021887 \\ 0,0021887 & 2,09892 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8138 & 0,358 \\ -0,00196 & 0,476 \\ 0,9226 & 0,278 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix}.$$

Para el pórtico, resuelto con el dimensionado adoptado más adelante, el diagrama de momentos de equilibrio es el de la figura A.2. Para el dimensionado se adoptaron como perfiles los correspondientes a la serie IPE para la viga y los de la HEB para el pilar, con acero S275 y las condiciones de seguridad habituales en CTE-DB-SA[1] —para facilidad de comparación más adelante hemos ignorado el pandeo— Las secciones usadas son IPE-160 y HEB-120, pues el dimensionado con HEB-100 resultaría levemente inseguro.

[1] Usamos en este ejemplo los valores de 1,05 como coeficiente de seguridad del material y 1,35 como coeficiente de seguridad de cargas. Los diagramas dibujados responden a los valores en servicio. Para las cargas ''de cálculo", al tratarse de un modelo elástico, los valores serían 1,35 veces mayores.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Carga repartida		30													
2	Luz 1	5														
3	Luz 2	5														
4	Luz 3	6		F			H									
5			ISOS	62,5	1	0	0	0	0	0						
6	M.Emp	62,5	93,75	0	0	1	1	0	0	0						
7		62,5	93,75	27,5	0	0	0	1	1	0						
8		90	135	-90	0	0	0	0	0	1						
9					0,8	0,4	0	0	0	0	1	0	0	0		
10					0,4	0,8	0	0	0	0	0	1	0	0		
11				k	0	0	0,8	0,4	0	0	0	1	0	0	B	
12					0	0	0,4	0,8	0	0	0	0	1	0		
13					0	0	0	0	0,67	0,33	0	0	1	0		
14					0	0	0	0	0,33	0,67	0	0	0	1	K U	
15					0,8	0,4	0	0	0	0	0,8	0,4	0	0	99,1	
16					0,4	0,8	0,8	0,4	0	0	0,4	1,6	0,4	0	-41,94	
17				Hk	0	0	0,4	0,8	0,67	0,33	0	0,4	1,47	0,33	68,67	
18					0	0	0	0	0,33	0,67	0	0	0,33	0,67	-169,34	
19				kBU	62,5	6,08	-6,08	38,16	-10,66	-90						
20				Me	-62,5	62,5	-62,5	62,5	-90	90						
21				Mextr.	0	-68,58	-68,58	-100,66	-100,66	0						
22				Mvano		62,59		9,81		89,36						
23																

Figura A.1: Solución numérica con auxilio de una hoja de cálculo

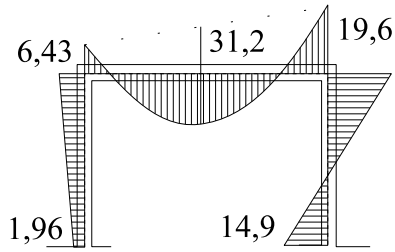


Figura A.2: Momentos flectores del pórtico

A.2. Problemas plásticos

Finalmente, en relación con el ejercicio sugerido al final del apartado 5.4.1, las condiciones de compatibilidad, equilibrio y de resistencia resultantes pueden determinarse con facilidad si se consideran las geometrías de rotura de la figura 5.14 junto con una aproximación lineal al diagrama de interacción momento–normal en la forma habitual de los códigos de acero, $\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Sd}}{M_{Rd}} \leq 1$. Normalizar esta última exige escribirla en el formato canónico $ax + by - c \leq 0$ en el que $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$ es un vector de módulo unidad, es decir el *versor* de la recta de interacción. El módulo del correspondiente vector en la anterior fórmula de comprobación es:

$$\left| \begin{matrix} \frac{1}{N_{Rd}} \\ \frac{1}{M_{Rd}} \end{matrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{N_{Rd}}\right)^2 + \left(\frac{1}{M_{Rd}}\right)^2} = \frac{\sqrt{N_{Rd}^2 + M_{Rd}^2}}{N_{Rd} M_{Rd}}$$

Por lo tanto la ecuación tendrá la forma

$$N_{Sd} \frac{M_{Rd}}{\sqrt{N_{Rd}^2 + M_{Rd}^2}} + M_{Sd} \frac{N_{Rd}}{\sqrt{N_{Rd}^2 + M_{Rd}^2}} - \frac{N_{Rd} M_{Rd}}{\sqrt{N_{Rd}^2 + M_{Rd}^2}} \leq 0$$

que, para simplificar la notación podemos escribir como

$$N_S m_R + M_S n_R - N_R m_R \leq 0$$

expresión en función de los esfuerzos —$(\cdot)_S$— o de las capacidades resistentes —$(\cdot)_R$— de la correspondiente sección. Los términos en minúscula denotan la capacidad resistente en una forma que podríamos llamar *relativa*, al estar dividida por la medida de la diagonal entre los puntos de máxima resistencia aislada a compresión o a flexión.

Resultan las ecuaciones siguientes:

Ecuación de compatibilidad 5.3:

$$\begin{bmatrix} \theta_{1p} \\ \theta_{2p} \\ \theta_{3p} \\ \theta_{4p} \\ \theta_{5v} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & -\frac{2}{l} & \frac{2}{l} & 0 \\ \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{2}{l} & 0 & -\frac{2}{l} \\ 0 & \frac{4}{l} & -\frac{2}{l} & -\frac{2}{l} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

Ecuación de equilibrio 5.2:

$$\gamma \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{l} & 0 & \frac{2}{l} & \frac{4}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{l} & 0 & 0 & -\frac{2}{l} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{l} & -\frac{2}{l} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1p} \\ M_{2p} \\ M_{3p} \\ M_{4p} \\ M_{5v} \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

Ecuación de resistencia 5.4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ n_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{p1} & 0 \\ 0 & n_{p2} & 0 & 0 & 0 & m_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & n_{p3} & 0 & 0 & 0 & m_{p3} \\ 0 & 0 & 0 & n_{p4} & 0 & 0 & m_{p4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1p} \\ M_{2p} \\ M_{3p} \\ M_{4p} \\ M_{5v} \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{pp1} \\ M_{pp2} \\ M_{pp2n} \\ M_{pp3} \\ M_{pp4} \\ M_{pv5} \\ N_{p1}m_{p1} \\ N_{p2}m_{p2} \\ N_{p3}m_{p3} \\ N_{p4}m_{p4} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ecuación en la que hemos omitido tanto en la matriz $\boldsymbol{\psi}$ como en la de los términos independientes $\boldsymbol{r}$ los subíndices $(\cdot)_R$ que denotan el término de capacidad resistente —para las mayúsculas— o de capacidad resistente *relativa* —para las minúsculas—.

Podemos comparar con el caso anterior, aplicando estas ecuaciones al mismo pórtico del problema anterior, usando el dimensionado que calificábamos de *levemente inseguro* con el *diagnóstico* elástico, de soporte HEB-100 y viga IPE-160; para poder usar el modelo planteado deberemos sustituir las cargas distribuídas en vano por cargas puntuales *equivalentes*. Usando las expresiones de solución para las ecuaciones anteriores, con cargas cuyos valores en servicio serán: $\boldsymbol{F}_1^T = \begin{bmatrix} 10 & 25 & 12,5 & 12,5 \end{bmatrix}$ kN y para los valores de resistencia de cálculo correspondientes a pilar y viga siguientes: $M_{pp} = 27,3$ mkN; $N_p = 682$ kN; $M_{pv} = 32,45$ mkN; y empleando $n_p = 0,040$, $m_p = 0,999$, resulta un factor de carga $\gamma = 1,34$ adicional al factor de seguridad usado para las cargas en el dimensionado del pórtico[2], resultando los diagramas de cálculo para la configuración de rotura que constan en la figura A.3 a). Se ve que la *leve inseguridad* del diagnóstico elástico se trastoca en el diagnóstico plástico en una seguridad total de $1,80$, valor superior $1,34$ veces al factor de $1,35$ usado para dimensionar.

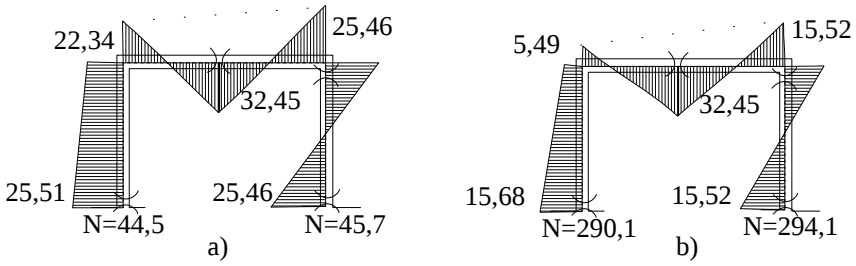


Figura A.3: Dos casos de normales y flectores de rotura del pórtico

Si en el ejemplo las cargas sobre los soportes aumentasen apreciablemente (por ejemplo hasta los valores $F_3 = F_4 = 200$ kN) la reducción en capacidad resistente a momento se hará notar en éstos: usando el mismo procedimiento de solución, los diagramas resultantes son ahora los de la figura A.3 b), para un factor de carga que pasa a ser $1,018 \times 1,35$, muy poco superior al del coeficiente

[2]Recuérdese que se usó 1,35 en el ejemplo elástico.

parcial para las cargas del problema original, en un cambio apreciable en la configuración del equilibrio final, aun cuando las rótulas se mantienen en los mismos puntos.

Si en vez de *peritar* abordamos el problema de dimensionar un pórtico sometido a tales cargas, de acuerdo a los métodos de dimensionado analizados en el apartado 5.2.2, la solución al problema formulado en la forma de 5.25, considerando coeficientes de coste positivos e independientes para todas las resistencias, es la de la figura A.4 a), Puede verse en dicha figura que, al ser todas las decisiones independientes, el mínimo resulta de reducir al mínimo el número de secciones en las que se resisten momentos. Como éstos son imprescindibles para el equilibrio, se aprovechan al máximo, concentrándose en forma claramente especializada para las cargas empleadas en el modelo.

Si, buscando un dimensionado más realista, empleamos el formato 5.27, usaremos como resistencias básicas a determinar dos diferentes, a saber: una para la resistencia a flexión de la viga, y otra para la resistencia a flexocompresión de todas las secciones del pilar. Usamos por tanto como ecuación de dimensionado 5.26 la siguiente, sugerida por los valores relativos de las resistencias de las secciones del pórtico ya analizado en rotura:

$$\begin{bmatrix} M_{pp1} \\ M_{pp2} \\ M_{pp2n} \\ M_{pp3} \\ M_{pp4} \\ M_{pv5} \\ N_{p1}m_{p1} \\ N_{p2}m_{p2} \\ N_{p3}m_{p3} \\ N_{p4}m_{p4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_v \\ D_p \end{bmatrix}$$

Los resultados son ahora, para varias combinaciones de costes, semejantes a los de la figura A.4 b), resolubles con mucha holgura en los pilares con secciones HEB-100, para una sección IPE-180 en la viga. La solución emplea más sección para la viga que en el anterior análisis sin obtener ninguna mejora alternativa debido a que la reducción obtenida en los pilares no se logra aprovechar dado el elemento mínimo real de la serie HEB.

La imagen A.5 muestra el diálogo del *Solver* usado para hallar la solución con la hoja de cálculo de OpenOffice mostrada en A.6, con costes unitarios de valores proporcionales a 1 y 5 respectivamente para viga y pilar (o lo que es lo mismo costes acumulados en pilares cinco veces mayores que los costes acumulados en viga para idéntico momento resistente).

Finalmente, si pretendemos dimensionar un pórtico mínimo con seguridad 1,35 frente a las dos hipótesis de carga alternativas $\boldsymbol{F}_I^T = \begin{bmatrix} 10 & 25 & 12,5 & 12,5 \end{bmatrix}$ kN, $\boldsymbol{F}_{II}^T = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 200 & 200 \end{bmatrix}$ kN, la formulación del problema en los términos de 5.28 reclama como solución las resistencias necesarias para resistir los esfuerzos de la figura A.7, siendo los esfuerzos de a) suficientes para soportar el primer caso de carga, y los de b) los requeridos para soportar el segundo. Es interesante analizar las ecuaciones activas en la solución[3]: en este caso son las

[3]puesto que hay 16 variables de decisión habrá 16 ecuaciones *activas* que serán las que corresponden a las condiciones límite alcanzadas para el mínimo en la función *objetivo*. Se

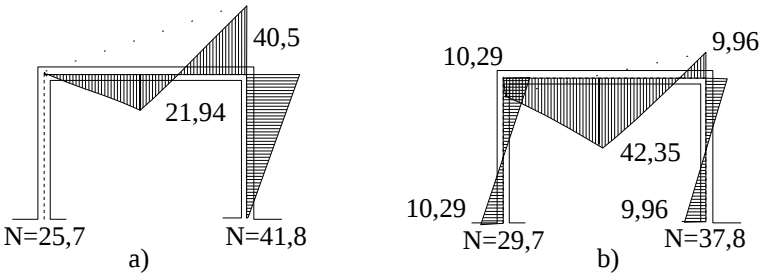


Figura A.4: Dos criterios de dimensionado plástico del pórtico

Figura A.5: Definición de objetivo, variables y restricciones

de equilibrio para ambas hipótesis junto con las de dimensionado de pilares en flexocompresión en sus dos extremos y el de la viga en flexión en el vano en la segunda hipótesis, junto con las de dimensionado de los extremos flectados en cabeza de ambos pilares y en pie del pilar derecho de la primera hipótesis. La solución obtenida muestra por tanto un esquema de esfuerzos que es crítico para el dimensionado mínimo requerido para soportar las cargas de la segunda hipótesis y que resultará en dimensiones suficientes para resistir las cargas de la primera hipótesis. Los esfuerzos determinados para ésta son una de las variantes de equilibrio posibles de entre las que son compatibles con el cumplimiento del teorema estático con el dimensionado obtenido y, como se ve, no coinciden necesariamente con la configuración de rotura que correspondería a ese dimensionado si se incrementase el *vector* de cargas que representa las de la hipótesis hasta el factor para el que se alcanzaría la rotura.

Finalmente vemos, al igual que si revisamos la solución de la figura A.4 a), que no concuerdan con la hipótesis que hemos manejado de que la rótula de los nudos viga–pilar se forma en los pilares: el momento en apoyo de las vigas es mayor que el de vano que es el empleado para su dimensionado. Este problema exigirá que la formulación de todas las piezas tenga en cuenta las distintas posibilidades de formación de rótulas, lo que sí habíamos hecho al formular los pilares del ejemplo.

localizan con facilidad puesto que son las que corresponden a igualdad estricta en las restricciones planteadas.

Ejemplos_plastico.ods - OpenOffice.org Calc

Archivo Editar Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana Ayuda

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Cálculo Plástico de Pórtico Simple				Usa SOLVER							
3												
4	Resistencia de Una sección a Normal + Momento											
5	Sección											
6	Id	A	Wy	nr	myr	(aux)	NRd	MRd	fy kN/cm²			
7					(m/n en cm)				26,19	275,00	1,05	
8	HE100B	26,04	1,04	0,999	0,040	26,06	682,00	27,29			19,40	1,42
11	IPE160	20,10	1,24	0,998	0,062	20,14	526,43	32,45				
12												
13		Cargas	10,00	18,03	13,50							
14	Factor Ca▸	COEF SE▸	25,00	45,08	33,75							
15	1,80	1,35	12,50	22,54	16,88							
16			12,50	22,54	16,88							
17	COMPATIBILIDAD		u = B U = HT U									
18	0,33	0,00	0,00	0,00								
19	0,33	-0,40	0,40	0,00								
20	0,33	0,00	0,00	0,00								
21	0,33	0,40	0,00	-0,40								
22	0,00	0,80	-0,40	-0,40								
23	0,00	0,00	1,00	0,00		ENFOQUE ESTÁTICO			EQ 5.12			
24	0,00	0,00	0,00	1,00								
25	Sup. Fluencia							CEROS	DECISION▸	Producto	Resistenc▸	Res / f
26	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	25,51	25,51	27,29	1,04
27	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-22,34	-22,34	27,29	1,04
28	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	25,46	22,34	27,29	1,04
29	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	25,46	25,46	27,29	1,04
30	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	32,45	25,46	27,29	1,04
31	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	44,46	32,45	32,45	1,24
32	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,00	0,00	45,70	27,27	27,27	1,04
33	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,00	0,00	1,80	-20,54	27,27	1,04
34	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,00		27,27	27,27	1,04
35	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,04	0,00		27,27	27,27	1,04
36	-0,33	-0,33	-0,33	-0,33	0,00	0,00	0,00	10,00		0	0,00	
37	0,00	0,4	0	-0,4	-0,80	0,00	0,00	25,00		0,00	0,00	
38	0,00	-0,4	0	0	0,40	-1,00	0,00	12,50		0,00	0,00	
39	0,00	0	0	0,4	0,40	0,00	-1,00	12,50		0,00	0,00	figura
40	- EQUILIBRIO							CARGAS				A3 a)
41												
42	COSTES DIMENSIO▸		Viga	Pilar								
43	TOTAL	99,68	1,00	5,00								
44						DIMENSIONADO			EQ 5.17			
45	Sup. Fluencia							Criterio Dimensionad▸		Decision	Producto	RESPUESTA
46	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	10,29	1,18	0,00
47	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	10,29	1,18	0,00
48	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	9,96	21,75	0,00
49	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	9,96	1,50	0,00
50	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	42,35	1,50	0,00
51	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	29,70	0,00	0,00
52	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,04	0,00	0,00	1,00	37,80	0,00	0,00
53	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	-0,04	0,00	0,00	1,00	42,35	0,00	0,00
54	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	-0,04	0,00	1,00	11,47	0,00	0,00
55	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	-0,04	0,00	1,00		0,00	0,00
56	0,33	0,33	0,33	0,33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		13,50	13,50
57	0,00	-0,4	0	0,4	0,80	0,00	0,00	0,00	0,00		33,75	33,75
58	0,00	0,4	0	0	-0,40	1,00	0,00	0,00	0,00		16,88	16,88
59	0,00	0	0	-0,4	-0,40	0,00	1,00	0,00	0,00		16,88	16,88
60	+ EQUILIBRIO							CEROS			figura	A4 b)

Hoja1 / perfiles / Hoja3

Figura A.6: Hoja de cálculo en análisis y dimensionado plástico

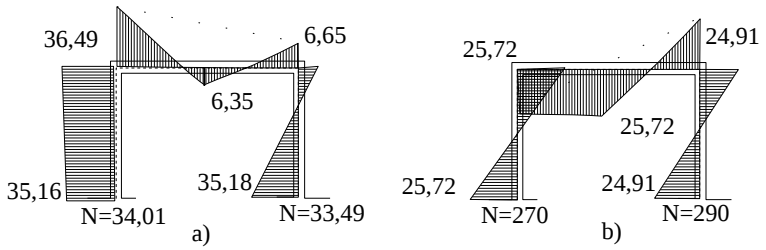


Figura A.7: Esfuerzos de dimensionado plástico para dos hipótesis de carga

Apéndice B

Comprobación plástica de perfiles

Una aplicación práctica de los criterios del análisis plástico consiste en determinar las resistencias últimas de los perfiles laminados. Son conocidas las resistencias plásticas en aplastamiento axial —que viene caracterizadas por el área A—, y en flexión, tanto para el eje de mayor inercia —caracterizada por el módulo plástico W_{ply}— como para el de menor —caracterizado por el módulo W_{plz}—

Sin embargo dichas constantes sólo determinan tres puntos de la superficie de fluencia, correspondientes a tres *direcciones* de esfuerzo independientes, y la forma habitual de combinar esfuerzos correspondientes a dichas direcciones es puramente lineal, es decir, limitando las resistencias al plano que pasa por los tres puntos reseñados. En [Cervera, 2010] demuestro que el empleo de un sólo punto más permite, en secciones doblemente simétricas, considerar en la comprobación sólo las combinaciones de los tres esfuerzos N, M_x, M_y tomados de dos en dos, puesto que la superficie de fluencia —considerando por ejemplo la región de esfuerzos positivos— envuelve al hexahedro —de caras triangulares— formado por los planos del triedro coordenado y los planos ortogonales a cada uno de éstos y que pasan por los dos de los puntos citados que están contenidos en dicho plano coordenado.

La región de la superficie completa real para un cierto perfil limitada por el triedro coordenado correspondiente a dichas *direcciones* podría estar representado por la superficie de trazos de la figura B.1. En ella se identifican regiones de compresión dominante, A y C, o de flexión dominante B y D, y puede intuirse el muy probable sobredimensionado que se producirá en las situaciones en las que no haya un predominio importante de alguno de los esfuerzos considerados.

Una aproximación sencilla algo más precisa a la superficie de rotura real puede venir dada por su truncamiento a los planos definidos por las líneas continuas de la figura citada, planos que quedan determinados por cuatro puntos adicionales para distintas condiciones de combinación de esfuerzos. Podemos determinar las constantes mecánicas necesarias para caracterizar dichas condiciones eligiendo las correspondientes situaciones de rotura, por ejemplo, tal como se representan en la figura B.2. En ella se identifican las constantes adicionales requeridas para identificar las condiciones de rotura plástica a partir

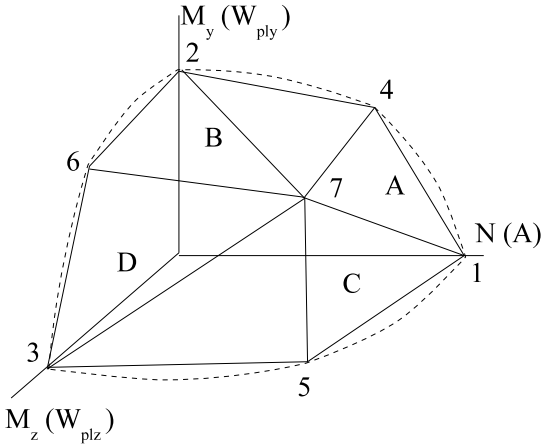


Figura B.1: Aproximación a superficie límite en perfiles

de la existencia de máximos en las tensiones, de signo opuesto, de acuerdo a los criterios de diferencia de color establecidos.

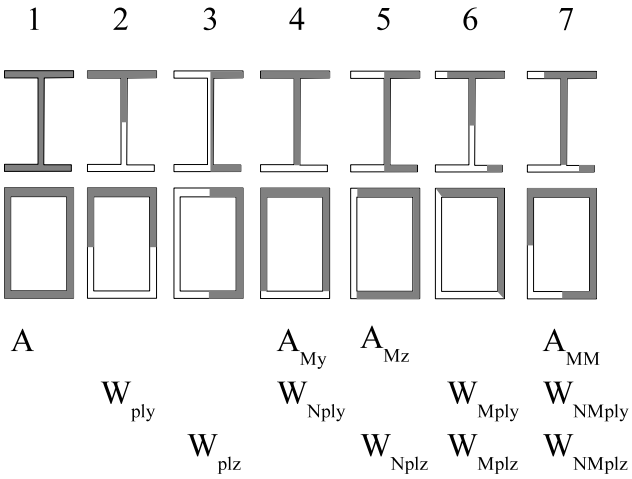


Figura B.2: Roturas plásticas de referencia en perfiles

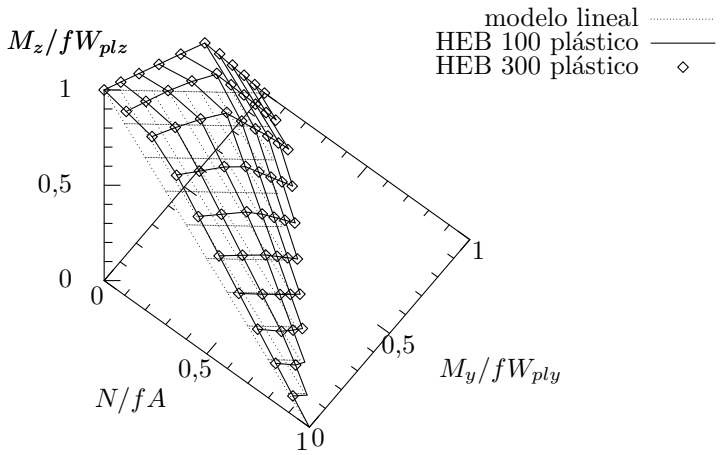
Consideremos ahora para cualquier estado de carga a que se vea sometido el perfil el vector que representa el triplete de esfuerzos $\begin{bmatrix} N_E & M_{Ey} & M_{Ez} \end{bmatrix}$. El coeficiente de seguridad será el cociente entre la longitud del segmento que une el origen con la posición de corte de la recta que contiene a dicho vector y la superficie límite, entre la magnitud del vector, operación que resulta fácil de realizar en un contexto informático, sin más que recorrer los seis planos representados que definen dicha superficie límite. La ventaja de realizar esta comprobación puede observarse comparando en las figuras de B.3 la superficie límite frente al resultado habitual de combinar linealmente los efectos para cada una de las componentes del triplete de esfuerzos.

Como ilustración práctica de las posibilidades que aporta el empleo de las herramientas genéricas de mayor utilidad disponibles en el contexto de unix —linux—, se reseña el trazado de la primera de las figuras de B.3. La figura se ha generado con *gnuplot*, aprovechando las posibilidades que brinda una base de datos de perfiles mantenida mediante *Postgresql*, en la que se ha implementado una función de comprobación como la sugerida arriba. La figura se obtuvo mediante la instrucción siguiente:

```
splot [a=0:1][b=0:1][0:1] 1-a-b t 'modelo lineal' lt 0 , \
 "< psql -t -c \"select p.id, \
      a.a*comprob_plastico_fq(p,p.a*a.a,p.wply*b.a,p.wplz*(1-a.a-b.a)), \
      b.a*comprob_plastico_fq(p,p.a*a.a,p.wply*b.a,p.wplz*(1-a.a-b.a)), \
      (1-a.a-b.a)*comprob_plastico_fq(p,p.a*a.a,p.wply*b.a,p.wplz*(1-a.a-b.a)) \
     from perfiles p, lista a, lista b \
     where p.id ~ 'HE100B' \
     order by a.a,b.a;  \" \
    baseperfiles  |  awk '$5==0 {print \"\";print} $5!=0 {print}' " \
 using 3:5:7 title 'HEB 100 plástico' with lines lt 1 , \
 "< psql -t -c \"select p.id, \
      a.a*comprob_plastico_fq(p,p.a*a.a,p.wply*b.a,p.wplz*(1-a.a-b.a)), \
      b.a*comprob_plastico_fq(p,p.a*a.a,p.wply*b.a,p.wplz*(1-a.a-b.a)), \
      (1-a.a-b.a)*comprob_plastico_fq(p,p.a*a.a,p.wply*b.a,p.wplz*(1-a.a-b.a)) \
     from perfiles p, lista a, lista b \
     where p.id ~ 'HE300B' \
     order by a.a,b.a; \" \
    baseperfiles " using 3:5:7 t 'HEB 300 plástico'
```

Se reconoce en el texto de la orden el trazado del plano lineal por la primera línea de la instrucción `splot` de *gnuplot*, la alimentación a éste —vía <— de los datos de la superficie límite a comparar, seleccionados —mediante la cláusula `using`— del listado generado por el uso del cliente de Postgresql —`psql`—. El cliente determina, mediante la instrucción `select`, la mejora en el vector de carga derivada del modelo plástico de comprobación. Los valores se obtienen operando la base de datos `baseperfiles` que contiene los de los laminados elegidos. Se observa finalmente, y para el caso del perfil pequeño, el empleo del filtro de textos `awk`, que formatea la salida de `psql` a la requerida por *gnuplot* para trazar la malla que aproxima la superficie partiendo de la matriz de puntos vertida por `psql`, matriz que se corresponde con las listas de coordenadas `a` y `b` definidas en la tabla `lista`, en décimos entre 0 y 1. Para el perfil grande no se usa tal cambio de formato, por lo que el trazado resultante es sólo de los puntos elegidos —los cuadrados de la gráfica—. Puede verse igualmente que la función `comprob_plastico_fq` —factor de carga en comprobación plástica— emplea cuatro parámetros, a saber, el perfil `p`, y los valores de los esfuerzos salvo tensión de comparación, $\begin{bmatrix} N_E/f_y & M_{Ey}/f_y & M_{Ez}/f_y \end{bmatrix}$. La función devuelve el correspondiente factor de carga para tales esfuerzos. Los datos suministrados para generar la gráfica son los de las coordenadas de cada caso límite para el supuesto lineal, y es dicho vector, aumentado en el correspondiente factor de carga, el que representa el punto de la superficie límite en el supuesto plástico.

Se adjuntan a continuación tablas de propiedades mecánicas de varias series de perfiles, incluyendo las propiedades identificadas en la figura B.2. Los valores se aportan en las unidades habituales para este tipo de tablas.



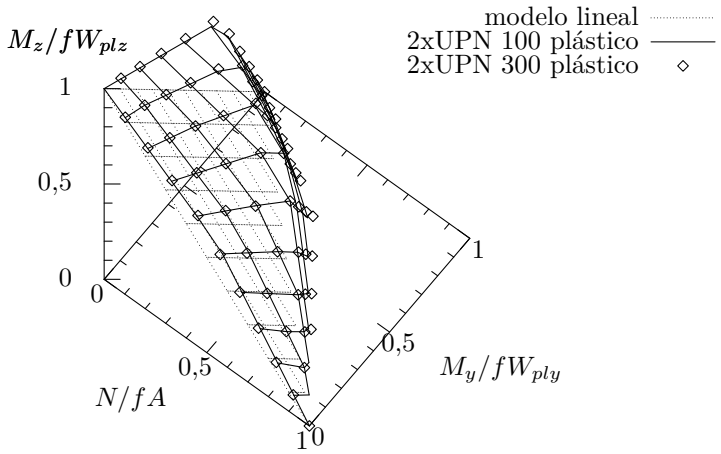


Figura B.3: Superficie límite en secciones formadas por HEB o por perfiles UPN en cajón

DUPN	h	b	tw	tf	a	avz	wely	welz	wply	wplz	Iy	Iz	iy	iz	amy	wnply	amz	wnplz	wmply	wmplz	amm	wnmply	wnmplz
80	80	90	6	8	22,04	9,8	53,2	47,05	64,6	67,88	212	211,74	3,1	3,1	7,64	51,8	12,44	40,3	51,8	40,3	11,02	32,3	33,94
100	100	100	6	8,5	27	12,92	82,4	75,99	98	93,15	412	379,97	3,91	3,75	10	77,8	15	56,4	77,8	56,4	13,5	49	46,58
DUPN	h	b	tw	tf	a	avz	wely	welz	wply	wplz	Iy	Iz	iy	iz	amy	wnply	amz	wnplz	wmply	wmplz	amm	wnmply	wnmplz
120	120	110	7	9	34	17,6	121,4	109,73	145,2	132,6	728	603,54	4,62	4,21	14,2	109,9	17,2	86,5	109,9	86,5	17	72,6	66,3
140	140	120	7	10	40,8	20,82	172,8	143,73	206	173,4	1210	862,35	5,45	4,6	16,8	156	21,2	110,7	156	110,7	20,4	103	86,7
160	160	130	7,5	10,5	48	25,2	232	186,61	276	223,68	1850	1212,95	6,21	5,03	20,7	204,1	24	147	204,1	147	24	138	111,84
180	180	140	8	11	56	30,18	300	239,02	358	284,48	2700	1673,16	6,95	5,47	25,2	260,3	27,2	190,1	260,3	190,1	28	179	142,24
200	200	150	8,5	11,5	64,4	35,42	382	298,27	456	353,6	3820	2237,02	7,7	5,89	29,9	325	30,4	240,6	325	240,6	32,2	228	176,8
220	220	160	9	12,5	74,8	41,24	490	370,3	584	438,3	5380	2962,6	8,48	6,29	34,8	415	35,2	299	415	299	37,4	292	219,15
240	240	170	9,5	13	84,6	47,42	600	449,6	716	530,4	7200	3821,87	9,22	6,72	40,4	502	39	366	502	366	42,3	358	265,2
260	260	180	10	14	96,6	54,24	742	543,7	884	641,4	9640	4893,06	9,99	7,12	46,2	620	44,6	442	620	442	48,3	442	320,7
280	280	190	10	15	106,6	58,56	896	629,1	1064	743	12560	5976,72	10,9	7,49	49,6	755	50,6	504	755	504	53,3	532	371,5
300	300	200	10	16	117,6	63,54	1070	725,7	1264	858,5	16060	7256,9	11,7	7,86	53,6	909	57,6	570	909	570	58,8	632	429,25
320	320	200	14	17,5	151,6	94,22	1358	949,6	1652	1121,8	21740	9495,62	12,1	7,91	81,6	1059	62	833	1059	833	75,8	826	560,9
350	350	200	14	16	154,6	101,68	1468	1007	1836	1175	25680	10069,7	12,9	8,07	90,6	1069	56,6	911	1069	911	77,3	918	587,5
380	380	204	13,5	16	160,8	106,46	1658	1084,6	2028	1257,5	31520	11063,31	14	8,29	95,5	1188	58,2	977	1188	977	80,4	1014	628,75
400	400	220	14	18	183	117,1	2040	1313,7	2480	1528,1	40700	14451,22	14,9	8,89	103,8	1513	71	1154	1513	1154	91,5	1240	764,05

Cuadro B.1: Propiedades estáticas de doble perfil UPN en cajón

IPE	h	b	tw	tf	a	avz	wely	welz	wply	wplz	Iy	Iz	iy	iz	amy	wnply	amz	wnplz	wmply	wmplz	amm	wnmply	wnmplz
80*	80	46	3,8	5,2	7,64	3,58	20,03	3,69	23,22	5,82	80,14	8,49	3,24	1,05	2,86	17,89	3,04	5,53	14,27	4,13	2,86	8,95	4,13
100*	100	55	4,1	5,7	10,3	5,08	34,2	5,79	39,41	9,15	171	15,92	4,07	1,24	4,03	29,56	4,1	8,73	24,63	6,47	4,03	14,78	6,47
IPE	h	b	tw	tf	a	avz	wely	welz	wply	wplz	Iy	Iz	iy	iz	amy	wnply	amz	wnplz	wmply	wmplz	amm	wnmply	wnmplz
120	120	64	4,4	6,3	13,2	6,31	52,96	8,65	60,73	13,58	317,8	27,67	4,9	1,45	5,14	45,8	5,28	13,01	37,81	9,68	5,14	22,92	9,68
140	140	73	4,7	6,9	16,4	7,64	77,32	12,31	88,34	19,25	541,2	44,92	5,74	1,65	6,33	67	6,58	18,48	54,84	13,79	6,33	33,5	13,79
160	160	82	5	7,4	20,1	9,66	108,7	16,66	123,9	26,1	869,3	68,31	6,58	1,84	7,96	92,6	8	25,12	77,6	18,66	7,96	46,3	18,66
180	180	91	5,3	8	23,9	11,25	146,3	22,16	166,4	34,6	1317	100,9	7,42	2,05	9,34	125,2	9,54	33,4	103,8	24,84	9,34	62,6	24,84
200	200	100	5,6	8,5	28,5	14	194,3	28,47	220,6	44,61	1943	142,4	8,26	2,24	11,5	162,8	11,2	43,1	139,2	31,9	11,5	81,4	31,9
220	220	110	5,9	9,2	33,4	15,88	252	37,25	285,4	58,11	2772	204,9	9,11	2,48	13,16	213,3	12,98	56,2	178,7	41,7	13,16	106,7	41,7
240	240	120	6,2	9,8	39,1	19,14	324,3	47,27	366,6	73,92	3892	283,6	9,97	2,69	15,58	270,7	14,88	71,7	231,2	52,9	15,58	135,4	52,9
270	270	135	6,6	10,2	45,9	22,14	428,9	62,2	484	96,95	5790	419,9	11,23	3,02	18,36	358	17,82	94,1	305,1	69,7	18,36	178,9	69,7
300	300	150	7,1	10,7	53,8	25,68	557,1	80,5	628,4	125,2	8356	603,8	12,46	3,35	21,7	464	21,3	121,5	396,2	90,3	21,7	232,2	90,3
330	330	160	7,5	11,5	62,6	30,81	713,1	98,52	804,3	153,7	11770	788,1	13,71	3,55	25,8	586	24,75	149,2	511,3	110,4	25,8	293	110,4
360	360	170	8	12,7	72,7	35,14	903,6	122,8	1019	191,1	16270	1043	14,95	3,79	29,52	750	28,8	185,5	644	137,6	29,52	375	137,6
400	400	180	8,6	13,5	84,5	42,69	1156	146,4	1307	229	23130	1318	16,55	3,95	35,9	939	34,4	221,8	837	164	35,9	470	164
450	450	190	9,4	14,6	98,8	50,85	1500	176,4	1702	276,4	33740	1676	18,48	4,12	43,3	1208	42,3	266,7	1098	197,6	43,3	604	197,6

Cuadro B.2: Propiedades estáticas de perfiles IPE

HEB	h	b	tw	tf	a	avz	wely	welz	wply	wplz	Iy	Iz	iy	iz	amy	wnply	amz	wnplz	wmply	wmplz	amm	wnmply	wnmplz
100	100	100	6	10	26,04	9,04	89,91	33,45	104,2	51,42	449,5	167,3	4,16	2,53	6,04	90	6	50,6	59,2	37,5	6,04	45	37,5
120	120	120	6,5	11	34,01	10,96	144,1	52,92	165,2	80,97	864,4	317,5	5,04	3,06	7,61	143,9	7,8	79,7	93,3	59,4	7,61	71,9	59,4
HEB	h	b	tw	tf	a	avz	wely	welz	wply	wplz	Iy	Iz	iy	iz	amy	wnply	amz	wnplz	wmply	wmplz	amm	wnmply	wnmplz
140	140	140	7	12	42,96	13,08	215,6	78,52	245,4	119,8	1509	549,7	5,93	3,58	9,36	215	9,8	118,1	137,9	88,2	9,36	107,5	88,2
160	160	160	8	13	54,25	17,59	311,5	111,2	354	170	2492	889,2	6,78	4,05	12,65	305,8	12,8	167,5	201,1	124,8	12,65	152,9	124,8
180	180	180	8,5	14	65,25	20,24	425,7	151,4	481,4	231	3831	1363	7,66	4,57	14,85	418	15,3	227,8	272,2	170,1	14,85	209,2	170,1
200	200	200	9	15	78,08	24,83	569,6	200,3	642,5	305,8	5696	2003	8,54	5,07	18,08	555	18	301,9	365	225	18,08	277,5	225
220	220	220	9,5	16	91,04	27,92	735,5	258,5	827	393,9	8091	2843	9,43	5,59	20,64	718	20,9	389	468	290,4	20,64	359	290,4
240	240	240	10	17	106	33,23	938,3	326,9	1053	498,4	11260	3923	10,31	6,08	24,4	910	24	493	598	367	24,4	455	367
260	260	260	10	17,5	118,4	37,59	1148	395	1283	602,2	14920	5135	11,22	6,58	27,4	1103	26	596	731	444	27,4	552	444
280	280	280	10,5	18	131,4	41,09	1376	471	1534	717,6	19270	6595	12,11	7,09	30,6	1320	29,4	710	874	529	30,6	660	529
300	300	300	11	19	149,1	47,43	1678	570,9	1869	870,1	25170	8563	12,99	7,58	35,1	1602	33	862	1068	641	35,1	801	641
320	320	300	11,5	20,5	161,3	51,77	1926	615,9	2149	939,1	30820	9239	13,82	7,57	38,3	1842	36,8	929	1228	692	38,3	921	692
340	340	300	12	21,5	170,9	56,09	2156	646	2408	985,7	36660	9690	14,65	7,53	41,9	2054	40,8	974	1381	726	41,9	1027	726
360	360	300	12,5	22,5	180,6	60,6	2400	676,1	2683	1032	43190	10140	15,46	7,49	45,6	2278	45	1019	1544	759	45,6	1139	759
400	400	300	13,5	24	197,8	69,98	2884	721,3	3232	1104	57680	10820	17,08	7,4	53,8	2707	54	1086	1878	810	53,8	1354	810
450	450	300	14	26	218	79,66	3551	781,4	3982	1198	79890	11720	19,14	7,33	62	3310	63	1176	2328	878	62	1654	878
500	500	300	14,5	28	238,6	89,82	4287	841,6	4815	1292	107200	12620	21,19	7,27	70,6	3960	72,5	1266	2833	945	70,6	1982	945
550	550	300	15	29	254,1	100,1	4971	871,8	5591	1341	136700	13080	23,2	7,17	80,1	4530	82,5	1311	3325	979	80,1	2266	979
600	600	300	15,5	30	270	110,8	5701	902	6425	1391	171000	13530	25,17	7,08	90	5130	93	1355	3860	1013	90	2565	1013
650	650	300	16	31	286,3	122	6480	932,3	7320	1441	210600	13980	27,12	6,99	100,3	5760	104	1400	4442	1046	100,3	2878	1046
700	700	300	17	32	306,4	137,1	7340	962,7	8327	1495	256900	14440	28,96	6,87	114,4	6410	119	1445	5117	1080	114,4	3210	1080
800	800	300	17,5	33	334,2	161,8	8977	993,6	10230	1553	359100	14900	32,78	6,68	136,2	7590	140	1493	6430	1114	136,2	3800	1114
900	900	300	18,5	35	371,3	188,8	10980	1054	12580	1658	494100	15820	36,48	6,53	161,3	9080	166,5	1582	8040	1181	161,3	4540	1181
1000	1000	300	19	36	400	212,5	12890	1085	14860	1716	644700	16280	40,15	6,38	184	10410	190	1627	9650	1215	184	5210	1215

Cuadro B.3: Propiedades estáticas de perfiles HE serie B

Apéndice C

Tratamiento en rotura de los problemas de barras o bloques rígidos

C.1. Presentación

En el anejo A se han presentado algunas soluciones mediante el análisis límite. Ahora bien, un enfoque sistemático capaz de implementarse con generalidad en procedimientos automáticos de cálculo debe permitir tratar cualesquiera problemas en su generalidad mecánica —tipos de rótula posibles y, por tanto, condiciones límite para éstas— y de configuración —organización y enlace de las barras o piezas que forman la estructura—

Sin entrar en el problema del continuo y, manteniendo el enfoque discreto que postula la formación aislada de rótulas, cuyas potenciales posiciones se describen a priori, el problema estará en describir de forma general la forma de construir el modelo completo de una estructura de barras en la que podamos prefigurar los enlaces o posiciones de las potenciales rótulas.

Un enfoque de gran calado es el aportado por Livesley en su clásico artículo sobre análisis límite de estructuras formadas por bloques rígidos [Livesley, 1978]. En dicho texto Livesley propone considerar como elementos del análisis las propias juntas, y considerar los bloques rígidos desde la mera perspectiva del equilibrio. O lo que es lo mismo, considerar los bloques como nudos extendidos –*extended nodes*– destinados a conectar las juntas entre sí. Dado que en el colapso plástico de una estructura formada por barras los tramos de éstas que no plastifican se comportan como sólidos rígidos, dicho enfoque resulta completamente general y de gran sencillez. Una dificultad de la propuesta de Livesley consiste en que reduce los esfuerzos generalizados de la junta a cargas equivalentes aplicadas a sus extremos, para facilitar el tratamiento en los límites a dichas cargas. Resulta más general, sin embargo, usar las resultantes habituales —normal, cortante y momento— y referir los límites a éstas.

Por ello presentamos aquí un breve desarrollo de dicho enfoque que permitirá abordar indistintamente el comportamiento de estructuras de barras dúctiles —metálicas en general, aunque también cabrá aplicarlo a barras de hormigón

armado en ciertas condiciones— o también el comportamiento de estructuras de fábrica, en condiciones análogas a las establecidas en el citado artículo.

En este enfoque, cualquier barra o región de la estructura que se mueve rígidamente se considera un nudo extenso [Cervera, 1995] al que se conectarán tantos elementos como secciones haya susceptibles de plastificar en el contorno de dicha región.

C.1.1. Nodo y elemento

Tal como se describió, los elementos serán las diferentes juntas o secciones —interfaces— capaces de generar deformaciones plásticas, conectando entre sí regiones amplias que no plastificarán —barras, bloques, nudos o agregaciones cualesquiera de éstos— que consideramos un nodo extenso.

El conjunto de los nodos constituye la estructura, a través de las conexiones formalizadas por los elementos. De este modo los parámetros de carga sobre la estructura y de desplazamiento generalizado de ésta se atribuyen a los nodos.

Cada nodo se caracterizará por un punto representativo de la región considerada y unos ejes propios respecto de los que se medirán cargas y movimientos —estos ejes propios serán usualmente los generales de la estructura, aunque no necesariamente— Como el nodo es amplio, los movimientos rígidos deben representarse por los desplazamientos y rotaciones de toda la región considerada, de modo que los parámetros de carga $\boldsymbol{F}$ y de desplazamiento de colapso $\boldsymbol{U}$ de cada nodo tendrán seis componentes en el espacio tridimensional, o tres en el bidimensional.

Cada elemento, o junta, tendrá dos caras a través de las que se conecta a los nodos que pone en contacto. Dichas caras —izquierda y derecha, o caras una y dos— tienen una geometría plana que puede referenciarse a través de las coordenadas de su centro de gravedad, y los ejes que, con origen en éste, definen la perpendicular al plano de la junta y los ejes principales de inercia de la correspondiente sección. Los ejes de las dos caras tienen idéntico origen y orientaciones exactamente opuestas, si bien sus solicitaciones internas únicas pueden describirse a través de la acción exterior sobre la junta en una cualquiera de dichas caras. En lo que sigue usaremos como ejes de referencia básicos de la junta, y representativos de las deformaciones y solicitaciones de ésta los de la segunda cara, o cara derecha[1].

De este modo las solicitaciones $\boldsymbol{f}$ en la junta pueden describirse igualmente por las resultantes de fuerzas y momentos en dicha cara que, nuevamente, serán —como mucho— seis para situaciones tridimensionales y tres para las bidimensionales, y a las que corresponderán un número idéntico de potenciales deformaciones plásticas $\boldsymbol{u}$, entendidas como los movimientos relativos de la cara 2 respecto de la 1 en el proceso de plastificación.

C.2. Ecuaciones de equilbrio

La relación entre los ejes de un elemento —o junta— y los de un nodo corresponde a un doble movimiento: una traslación y una rotación. De tal modo que tenemos la composición de los dos movimientos representados en las ecuaciones 2.2 y 2.3.

[1] usando la clásica regla de manejar signos positivos para las direcciones crecientes.

Puesto que de lo que se trata es de considerar el equilibrio en los nudos, hemos de representar dichas ecuaciones en la forma en que puedan acumularse los esfuerzos que la junta o elemento aporta para el equilibrio del nodo al que conecta.

Consideremos un nodo conectado a la cara derecha —o creciente— de la junta. Las fuerzas que el nudo ejerce sobre la junta permiten describir los esfuerzos sobre ésta, que representan las solicitaciones de la junta y son la parte de las fuerzas sobre el nodo que se ejercen al exterior del mismo a través de dicha junta: su *contribución*. Dichas solicitaciones estarán lógicamente referidas a los ejes de la junta ya definidos.

Si rotamos la representación de las solicitaciones a ejes coincidentes con los del nodo, y las trasladamos al punto de referencia de éste de acuerdo a las ecuaciones 2.2 y 2.3, tendremos la parte buscada de las ecuaciones de equilibrio a que contribuye la junta: $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{H}_{ij}\boldsymbol{f}_j$ que pueden entenderse como la parte de las fuerzas $\boldsymbol{F}$ que se ejercen sobre el nodo i que son transferidas a través de la junta j.

Desarrollando la composición de las ecuaciones 2.2 y 2.3 tendríamos por tanto, para la contribución de la junta al nodo:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x & \gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_z y - \alpha_y z & \beta_z y - \beta_y z & \gamma_z y - \gamma_y z & \alpha_x & \beta_x & \gamma_x \\ \alpha_x z - \alpha_z x & \beta_x z - \beta_z x & \gamma_x z - \gamma_z x & \alpha_y & \beta_y & \gamma_y \\ \alpha_y x - \alpha_x y & \beta_y x - \beta_x y & \gamma_y x - \gamma_x y & \alpha_z & \beta_z & \gamma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_\gamma \\ m_\alpha \\ m_\beta \\ m_\gamma \end{bmatrix} \tag{C.1}$$

siendo $[x, y, z]^T$ las coordenadas del centro de gravedad de la junta en ejes del nodo (y para origen situado en éste) y siendo los ejes de la junta los $[\alpha, \beta, \gamma]^T$ de modo que α_x representará el coseno director de la dirección α con la x.

La expresión en dos dimensiones es de la forma

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x & 0 \\ \alpha_y & \beta_y & 0 \\ \alpha_y x - \alpha_x y & \beta_y x - \beta_x y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ m_z \end{bmatrix} \tag{C.2}$$

con $z = \gamma$ y donde definido el ángulo $\varphi = \langle x\alpha \rangle$ tendremos $\alpha_x = \cos\varphi$, $\alpha_y = \sin\varphi$, $\beta_x = -\sin\varphi$, $\beta_y = \cos\varphi$.

En el caso de que el nodo conecte a la cara izquierda, bastará cambiar los signos en los términos de proyección de la expresión —usando $-\boldsymbol{H}^*$—. Finalmente, si a un nodo conectan varias juntas, bastará sumar al equilibrio del nodo las contribuciones de todas ellas.

De este modo las expresiones matriciales de equilibrio resultantes son del tipo

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{12} & \dots & \boldsymbol{H}_{1m} \\ \boldsymbol{H}_{21} & \boldsymbol{H}_{22} & \dots & \boldsymbol{H}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{H}_{n1} & \boldsymbol{H}_{n2} & \dots & \boldsymbol{H}_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_m \end{bmatrix} \tag{C.3}$$

en la que $\boldsymbol{H}_{ij}$ expresa la contribución de la junta —columna— j en el nodo —fila— i. Una buena parte de éstas serán matrices cero: en cada columna sólo habrá dos de ellas no nulas, al ser las matrices que expresan la contribución de la junta al equilibrio de cada uno de los dos nodos que conecta, y en dichas dos matrices los términos de fuerza serán idénticos y con signos opuestos —las dos caras opuestas de la misma junta— si bien los términos de momento podrán variar, dependiendo de las coordenadas y direcciones de la junta respecto al nodo considerado.

C.3. Ecuaciones de resistencia

La resistencia de cada una de las juntas deberá expresarse en la forma habitual en el apartado 5.2.2, o en la forma definida en el 5.3.1:

$$\boldsymbol{\psi f} - \boldsymbol{d r}_b \leq \mathbf{0}$$

Hemos visto la forma de $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{d}$, y $\boldsymbol{r}_b$ en un par de ocasiones, en el apartado 2.3 para el caso de las secciones dúctiles metálicas simétricas y a pie de página en el 5.1.1 para secciones rectangulares de materiales sin resistencia en tracción.

En ambas ocasiones hemos considerado sólo la interacción resistente de las componentes normales a la sección —momento y normal— pero, sin embargo, en las expresiones que acabamos de manejar para el equilibrio estamos considerando también la componente tangencial por resultar imprescindible para la descripción completa del equilibrio de los nodos. Como no es habitual considerar críticas las resistencias en cortadura en los casos habituales, bastaría usar exactamente las mismas expresiones de resistencia ampliadas para incorporar el nuevo esfuerzo sin más que emplear valores nulos en la correspondiente columna de $\boldsymbol{\psi}$ para contabilizar el efecto de dicha solicitación en la interacción.

Si queremos completo rigor tendremos ahora dos cuestiones a considerar: en primer lugar la definición completa —y más compleja— de las superficies límite considerando todos los esfuerzos. Pero, más importante aún, deberemos también ser conscientes de que el modelo introducido para representar la resistencia en cortadura puede significar la invalidación de la regla de ortogonalidad de los desplazamientos de rotura a la superficie límite —la regla de flujo—, regla que dejará de ser de aplicación si se establecen condiciones de plasticidad no asociada: es exactamente lo que sucederá si se emplean condiciones de resistencia al deslizamiento ligadas a mecanismos de fricción de tipo *Coulomb* como bien hace notar [Livesley, 1978], que atribuye a Drucker la paternidad de la reflexión.

En el caso de las fábricas, añadir resistencias en cortadura proporcionales al normal existente añade a las seis restricciones preexistentes dos más, correspondientes a los dos nuevos planos de rotura por esfuerzo tangente en cualquiera de los sentidos. Con resistencia proporcional al esfuerzo normal y al coeficiente de rozamiento μ las ecuaciones ya citadas que detallábamos en el apartado 5.1.1

quedarían de la forma[2]

$$\begin{bmatrix} m & n & 0 \\ -m & -n & 0 \\ m & -n & 0 \\ -m & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \\ \mu & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \\ T \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ n \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |N_m| z_{pl} \tag{C.4}$$

Cabe señalar en este caso que en la medida en que los problemas serán en su mayoría de estabilidad —la geometría resulta o no viable para las cargas dadas— resultará a menudo adecuado formular el problema en los términos definidos por las ecuaciones 5.14 y 5.15.

En el caso de las secciones metálicas, un procedimiento acorde al enfoque del Eurocódigo exigiría añadir ocho nuevas superficies de interacción, cuatro para cada signo del cortante, que corresponderían a los planos definidos por cada una de las rectas límite dibujadas en el plano que representa el estado de cortante igual a la mitad de la máxima resistencia a cortante de la sección, junto con el punto de máxima resistencia a cortante con resistencia nula para momento y normal.

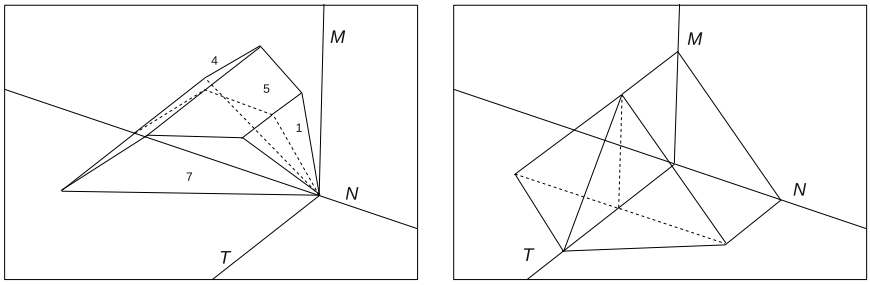


Figura C.1: Poliedros de rotura, fábrica o acero. Para la fábrica se indican las ecuaciones a que corresponden las caras visibles

Nótese que en la ecuación C.2 los valores de los esfuerzos en la junta son precisamente $f_\alpha = N$, $f_\beta = T$, $m_z = M$ por lo que bastaría renombrarlos y reordenarlos en cualquiera de las dos ecuaciones C.2 o C.4 para poderlos identificar en el vector de esfuerzos $\boldsymbol{f}$ atribuído a la junta, quedando por tanto, si se tratase de la junta i una expresión en la forma $\boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{f}_i \leq \boldsymbol{r}_i$.

Si ahora queremos considerar el conjunto de las juntas de la estructura, bastará agrupar las expresiones individualizadas de resistencia de cada junta en

[2]En la figura C.1 se ve que el modelo resulta tal vez grosero en las regiones de fuerte combinación de normal y cortante por su excesiva agudeza. Ésta resultaría algo más acotada si se considera que una resistencia en tracción del 11 % de la de compresión limitaría la resistencia en tensión tangencial —y por ende el coeficiente de rozamiento máximo a considerar en la fábrica— a un tercio de ésta.

una agrupación diagonal de la forma

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\psi}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{\psi}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

con lo que tenemos las ecuaciones de resistencia C.5 y equilibrio C.3 en la forma requerida para aplicar la solución descrita en alguna de las formas 5.12, 5.13 o 5.15.

C.4. Aplicación: rotura de arco de fábrica

Como ejemplo de aplicación consideramos la rotura de un arco de fábrica cuya directriz corresponde a un cuarto de círculo, y cuya cuerda (luz del arco) es de 20 m, con dovelas de $0,5$ m. de espesor.

Usamos como condición de resistencia de cualquiera de las juntas la siguiente, que considera una superficie de rotura piramidal y expresa los límites en flexión compuesta, en compresión, y en deslizamiento

$$\begin{bmatrix} 0,24 & 0 & 0,97 \\ 0,24 & 0 & -0,97 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0,3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La expresión es *casi* análoga a la de considerar resistencia infinita en compresión y nula en tracción: sólo se diferencia en que se pone un límite a la compresión máxima en la junta, aunque dicha compresión puede ser tan excéntrica como admita la geometría de la junta.

Usamos como condiciones de equilibrio las que siguen, ejemplificadas para la primera dovela, que expresan el equilibrio de las solicitaciones sobre las juntas con las cargas aplicadas —horizontal, vertical y momento—

$$\begin{bmatrix} -0,71 & 0,71 & 0 & 0,76 & -0,65 & 0 \\ -0,71 & -0,71 & 0 & 0,65 & 0,76 & 0 \\ 0 & 0,56 & -1 & 0 & 0,56 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_d \\ T_d \\ M_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_H \\ F_V \\ F_M \end{bmatrix}$$

En estas condiciones consideramos cuatro problemas:

1 el del peso propio —suponemos un valor de 10 por dovela— buscando el factor de carga para un incremento en dicho peso, con la formulación de 5.12

2 el del peso propio más una carga puntual de 20 en la dovela número 5, buscando el factor de carga que corresponda a un incremento proporcional de todas las cargas, con la formulación de 5.12

3 el mismo problema anterior, pero con la formulación de 5.13 para incrementar sólo la carga puntual

4 el segundo problema, pero con la formulación *robusta* 5.15 para determinar la peor alteración en las cargas aplicadas

Los resultados de dichos problemas están en las figuras de C.2, en las que se traza el eje que identifica al correspondiente polígono de presiones y se señalan las posiciones correspondientes a los límites de resistencia, posiciones a las que correspondrán las deformaciones plásticas que activan el colapso. Los esfuerzos correspondientes a dichas condiciones límite y el factor de seguridad obtenido se muestran en el cuadro 1. Cabe señalar que, así como en los tres primeros casos puede interpretarse el factor de seguridad como un *factor de carga*, en el último de los problemas el factor de seguridad es, como se ha visto anteriormente, la proporción entre las dimensiones lineales de la geometría de la superficie de rotura y la geometría homóloga a la anterior, una vez contraída hacia el centro —la situación de esfuerzos más alejada posible de la rotura— hasta alcanzar el punto representativo de la carga efectivamente actuante. No es, por tanto un *factor de carga* en los casos en que dicho centro corresponde a una situación de esfuerzos no nula, como es el caso que nos ocupa.

La solución al primero de los problemas, debido a la simetría, exige la activación de la condición de aplastamiento de las juntas de apoyo, pues de otro modo, el arco triarticulado que se deriva de la geometría de las cargas sería estable para un crecimiento proporcional indefinido de éstas.

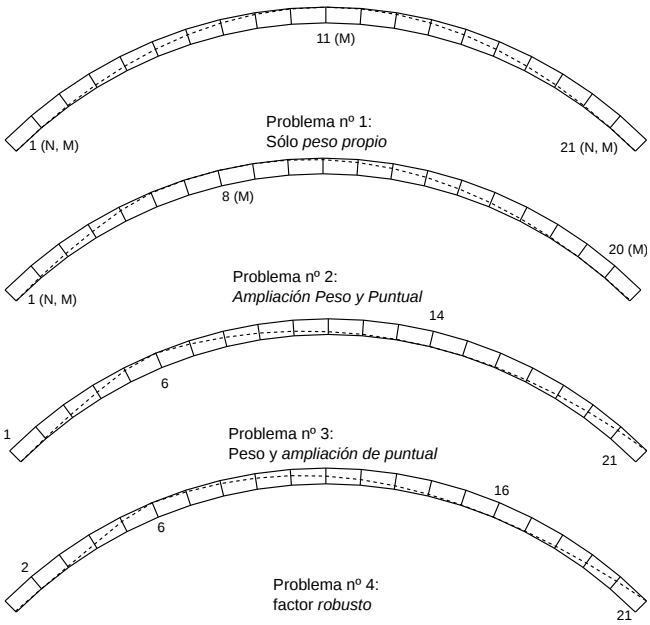


Figura C.2: Soluciones a las configuraciones de rotura del arco

Nº	F. seg	Junta	N	T	M
1	3,55	1 (N)	-500	-1,39	-125
		1 (M)	-500	-1,39	-125
		11 (M)	-352,57	0	88,14
		21 (N)	-500	1,39	-125
		21 (M)	-500	1,39	-125
2	3,13	1 (N)	-500	-14,8	-125
		1 (M)	-500	-14,8	-125
		8 (M)	-352,78	0,22	88,2
		20 (M)	-451,62	0,51	-112,91
3	2,87	1 (M)	-210,36	-2,56	-52,59
		6 (M)	-152,28	16,33	38,07
		14 (M)	-151,47	1,49	-37,87
		21 (M)	-179,43	-28,37	44,86
4	1,27	2 (M)	-100,17	-1,86	-25,04
		6 (M)	-60,26	4,18	15,06
		16 (M)	-62,43	1,06	-15,61
		21 (M)	-94,71	-19,46	23,68

Cuadro 1: Factor de seguridad y esfuerzos de rotura en arco

Resulta muy interesante considerar los resultados del cuarto problema: la situación de colapso más cercana a la situación original consiste en descargar parcialmente el arco, variando levemente la orientación de la carga puntual. La descarga más desfavorable es casi radial, y se representa en la figura C.4. Dicho resultado no es en absoluto desconocido: es sabido que se han producido daños apreciables, e incluso colapsos, en bóvedas de catedrales góticas a las que se han *limpiado* los rellenos. Lo interesante de la solución aportada es que tal mala práctica puede detectarse prematuramente, incluso aunque no se tuviese sospecha previa ni noticia de ningún antecedente.

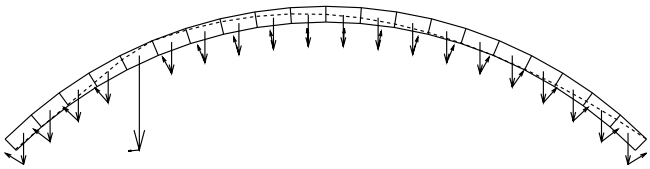


Figura C.3: Alteración pésima de la carga original

Si como alternativa a la condición de resistencia utilizada —que por cierto tiene la propiedad de tener un único punto como *centro*— usamos la condición —que podríamos llamar *hexagonal*— establecida en el cuadro 2, lógicamente deben cambiar apreciablemente los resultados, obteniéndose los de la figura C.4.

En éstos se ve que llegar al aplastamiento de las secciones de arranque implica en éstas la ausencia de excentricidad que, por otro lado, resulta más reducida en otras regiones que plastifican con flexión y en las que concurre un fuerte efecto de los esfuerzos normales de compresión.

Pero en este caso el *centro* de la superficie de rotura ya no es un punto único, como puede verse si analizamos el diagrama de interacción momento–normal para una de las juntas de la figura C.5: la mayor distancia a la región más próxima a los máximos momentos es constante para todo un conjunto de valores diferentes; la solución definida en la última gráfica de la figura C.6 corresponde al *centro* obtenido por simplex, que es el punto 1 del diagrama. Si usamos los puntos 2, o 3 de dicha figura obtendremos condiciones de rotura distintas y, por tanto, diferencias para las alteraciones pésimas a la configuración de carga inicial, aunque todas ellas tengan características comunes. Dicha diferencia o inestabilidad aconsejará, al menos como consideración provisional, tratar de manejar condiciones de resistencia que garanticen un *centro* único.

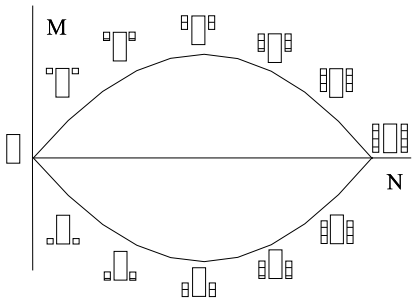
Un ejemplo típico de función límite de rotura es el de la figura, que representa las condiciones de rotura de una rebanada rectangular de una pieza sometida a flexocompresión en un material sin resistencia a tracción como puede ser el hormigón o los materiales de fábrica. La doble parábola dibujada puede aproximarse por el hexágono que las envuelve trazando las tangentes en los puntos de máximo y mínimo normal y momento. Cabe hacer notar que en dicho trazado, las tangentes oblicuas tienen una pendiente que es igual que el brazo plástico $z_{pl} = h/2$ de la versión *dúctil* de la sección, lo que puede comprobarse sin más que verificar que el momento máximo es igual al producto de la resistencia de media sección por medio brazo, tal como resulta de las propiedades de la parábola: $M_m = N_m z_{pl}/4$. De este modo las seis comprobaciones representadas en el hexágono, considerando negativas a las compresiones, serán

$$N_m \leq N + \frac{M}{z_{pl}} \leq 0$$
$$N_m \leq N - \frac{M}{z_{pl}} \leq 0$$
$$N_m \leq 4\frac{M}{z_{pl}} \leq -N_m$$

ecuaciones que pueden reescribirse también en la forma

$$\begin{bmatrix} m & n \\ -m & -n \\ m & -n \\ -m & n \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ n \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} |N_m| z_{pl}$$

en las que $n = 1/\sqrt{1 + z_{pl}^2}$, $m = z_{pl}/\sqrt{1 + z_{pl}^2}$, resultando por tanto expresiones que corresponden al formato general de la ecuación 2.7.



Cuadro 2: Superficie de fluencia en rebanada de material sin tracciones

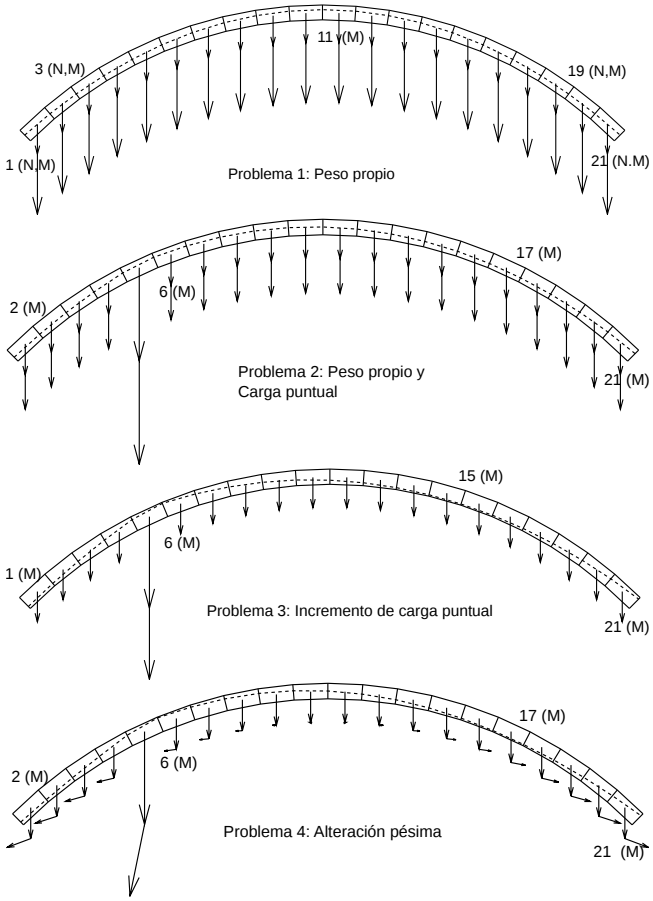


Figura C.4: Configuraciones de rotura para ley de resistencia *hexagonal*

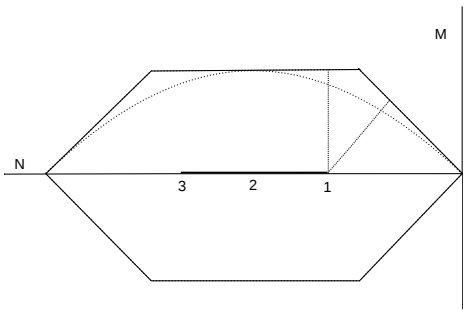


Figura C.5: Interacción momento–normal, y posición del *centro*

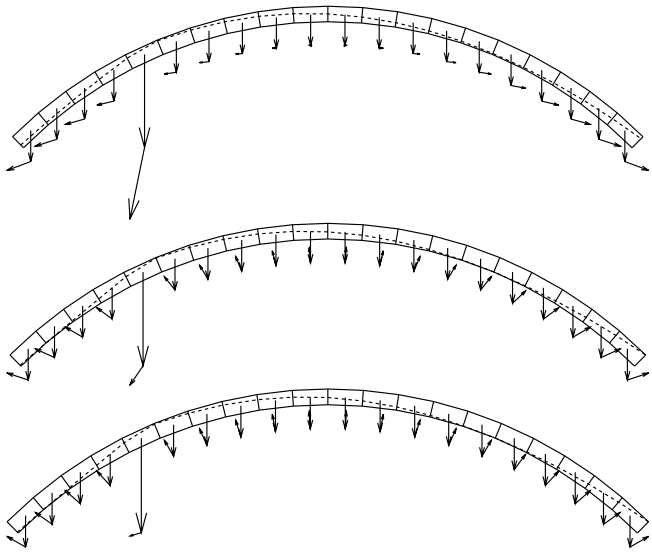


Figura C.6: Alteración pésima dependiendo del *centro* considerado

Bibliografía

[Carmichael, 1981] Carmichael, D. G. (1981). *Structural Modelling and Optimization*. Ellis Horwood, Chichester.

[Cervera, 1987] Cervera, J. (1987). *Métodos de análisis en teoría de la elasticidad*. Instituto Juan de Herrera, Madrid.

[Cervera, 1989] Cervera, J. (1989). Tres teoremas fundamentales de la teoría del diseño de estructuras. *Informes de la Construcción*, 40(399):57 – 66.

[Cervera, 1990] Cervera, J. (1990). Las estructuras y el peso propio. *Informes de la Construcción*, 42(407):73 – 85.

[Cervera, 1995] Cervera, J. (1995). El nudo extenso: sobre cómo resolver un error común en los programas de análisis matricial de estructuras de barras, escritos para el proyecto de estructuras que suelen serlo de hormigón armado. *Hormigón y Acero*, (197):27 – 40.

[Cervera, 2010] Cervera, J. (2010). Un criterio robusto para la medida del margen -coeficiente- de seguridad. *Informes de la Construcción*, 62(518):33 – 42.

[Chan, 1960] Chan, A. S. L. (1960). Título no citado. Technical Report 142, College of Aeronautics. Citado por Parkes 1965.

[Cox, 1965] Cox, H. L. (1965). *The Design of Structures of Least Weight*. Pergamon Press.

[Dantzig, 1963] Dantzig, G. B. (1963). *Linear programming and extensions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[de Miguel, 1974] de Miguel, J. L. (1974). *El trabajo estructural, un nuevo escalar de las estructuras*. PhD thesis, Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Madrid.

[Duhem, 1905] Duhem, P. (1905). Origines de la statique. Paris.

[Farkas, 1984] Farkas, J. (1984). *Optimim Design of Metal Structures*. Ellis Horwood, Chichester.

[Fiacco and Mc Cormick, 1968] Fiacco, A. V. and Mc Cormick, G. (1968). *Non Linear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Technique*. Walley, New York.

[Galileo, 1638] Galileo (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Ezelvirii, Leyden.

[García de Arangoá, 1964] García de Arangoá, A. (1964). Elasticidad teórica. Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Madrid. Es más accesible la segunda edición de 1974.

[Gass, 1969] Gass, S. I. (1969). *Linear Programming. Methods and applications*. Mc-Graw Hill Co., third ed. edition.

[G.Augusti et al., 1984] G.Augusti, Baratta, A., and Casciati, F. (1984). *Probabilistic Methods in Structural Engineering*. Chappman and Hall, London, New York.

[Himmelblau, 1971] Himmelblau, D. M. (1971). *Applied Non Linear Programming*. Mc Graw Hill, New York.

[Karmarkar, 1984] Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for lineal programming. *Combinatorica*, 4(4):373–395.

[Livesley, 1978] Livesley, R. (1978). Limit analysis of structures formed from rigid blocks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:1853–1871.

[Luenberger, 1989] Luenberger, D. G. (1989). *Programación lineal y no lineal*. Addison-Wesley Iberoamérica, Mexico, versión en español de m.lópez mateos edition.

[Maxwell, 1890] Maxwell, J. C. (1890). Reciprocal figures, frames, and diagrams of forces. In *Scientific Papers*, volume II, pages 175–177. Cambridge University Press.

[Michell, 1904] Michell, A. G. M. (1904). The limits of economy of materials in frame-structures. *Philosophical Magazine*, 8(47):175–177.

[Naredo, 1994] Naredo, J. M. (1994). El proceso industrial visto desde la economía ecológica. *Economía industrial*, 297.

[Nash and Sofer, 1996] Nash, S. G. and Sofer, A. (1996). *Linear and Nonlinear Programming*. McGraw-Hill series in industrial engineering and management sciences. McGraw-Hill.

[Nielsen, 1998] Nielsen, M. P. (1998). *Limit analysis and concrete plasticity*. CRC Press, Boca Raton, Florida. 2ª edición.

[Ortiz and Hernando, 2002] Ortiz, J. and Hernando, J. I. (2002). *Estructuras de edificación. Análisis lineal y no lineal*. Ariel, Ciencia y Tecnología, Barcelona.

[Parkes, 1965] Parkes, E. V. V. (1965). *Braced Frameworks*. Pergamon Press, Oxford.

[Rao, 1978] Rao, S. (1978). *Optimization. Theory and Application*. Walley Eastern Ltd., New Delhi.

[Save, 1983] Save, M. (1983). La théorie des charges limites et son application aux maçonneries. In *Restauration des Ouvrages et des Structures*, pages 249–280. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

[Sánchez Gálvez, 1999] Sánchez Gálvez, V. (1999). *Comportamiento plástico de materiales.* Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid.

[Timoshenko, 1934] Timoshenko, S. (1934). *Theory of Elasticity.* McGraw Hill. Reedición en 1951; traducido al español en 1968.

[Valero, 1994] Valero, A. (1994). Reflexiones sobre los costes energéticos de la sociedad actual. *Economía industrial*, 297.

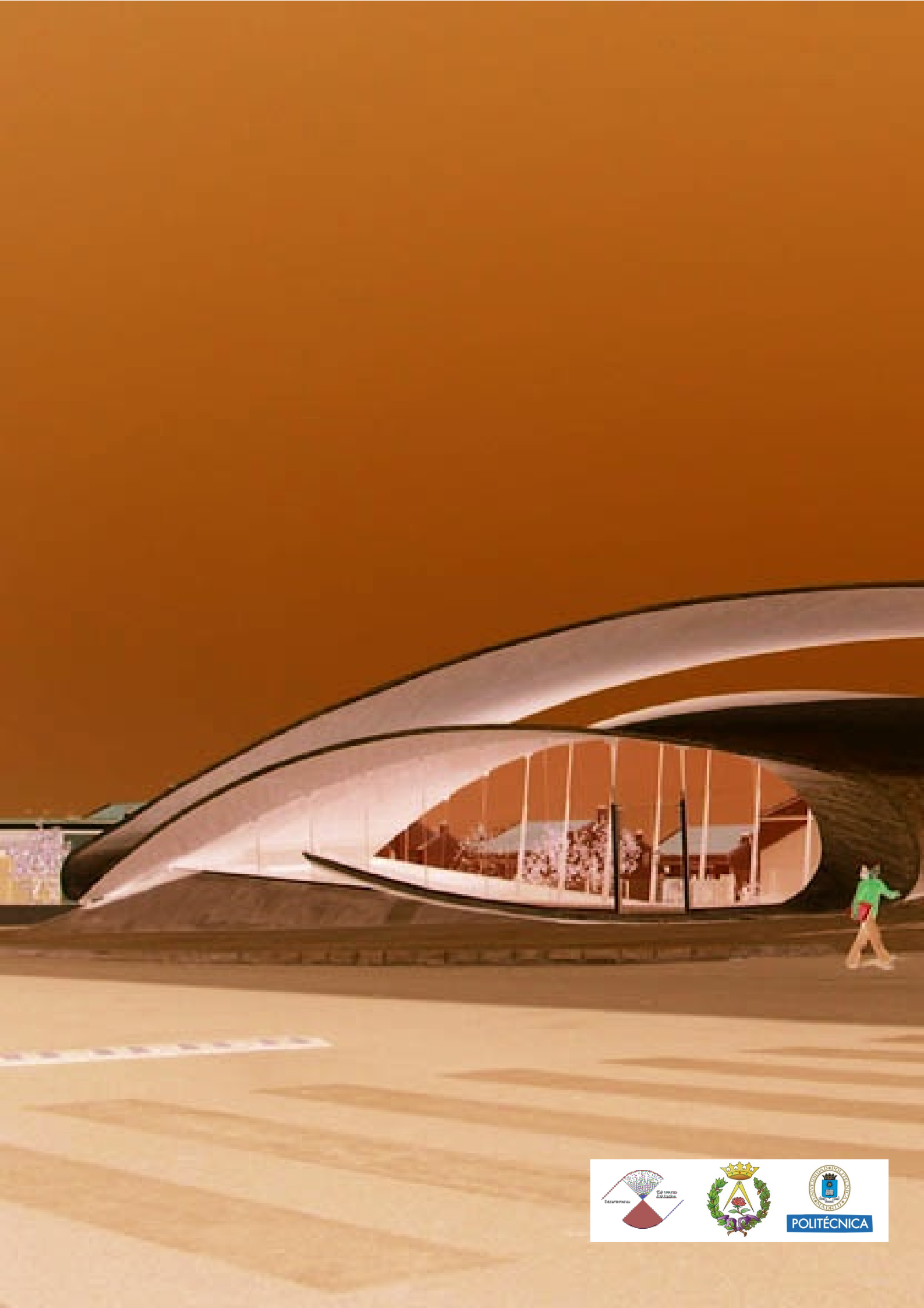
[Valiente Cancho, 2000] Valiente Cancho, A. (2000). *Comportamiento mecánico de matetiales: elasticidad y viscoelasticidad.* Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid.

[Varignon, 1725] Varignon (1725). Nouvelle mécanique ou statique. Paris.

[Vázquez, 1994] Vázquez, M. (1994). *Recocido simulado: un nuevo algoritmo para la optimación de estructuras.* PhD thesis, Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

[Zienkiewicz, 1980] Zienkiewicz, O. C. (1980). *El método de los elementos finitos.* Reverté, Barcelona.

Índice de figuras


POLITÉCNICA